Variables et processus aléatoires

Processus aléatoire classique :

- $\omega_1(y_1,t_1)$ la probabilité d'avoir $y_1 \le y(t_1) \le y_1 + dy_1$
- $\overline{y(t_1)} = \int y_1 \ \omega_1(y_1,t_1)\ \mathrm{dy}_1$
- $\omega_2(y_1,t_1;y_3,t_3) = \int dy_2 \ \omega_3(y_1,t_1;y_2,t_2;y_3,t_3)$
- $P_1(y_2,t_2 \mid y_1,t_1)$ la proba de $y(t_2)=y_2$ sachant $y(t_1)=y_1$
- $\omega_2(y_1,t_1;y_2,t_2)\,dy_1 dy_2 = P_1(y_2,t_2 \mid y_1,t_1)\,\omega_1(y_1,t_1)\,dy_1$
- $P_1(y_3,t_3 \mid y_1,t_1) = \int dy_2 P_2(y_3,t_3 \mid y_2,t_2;y_1,t_1)\,P_1(y_2,t_2 \mid y_1,t_1)$

Processus de Markov :

- Ne dépend plus du passé ie $P_{n-1}(y_n,t_n \mid y_{n-1},t_{n-1};\ldots;y_1,t_1) = P_1(y_n,t_n \mid y_{n-1},t_{n-1})$
- Equation de Smoluchowski : $P(y_3,t_3 \mid y_1,t_1) = \int dy_2 P(y_3,t_3 \mid y_2,t_2)\,P_1(y_2,t_2 \mid y_1,t_1)$
- Equilibre détaillé : $W_{ij}P_j = W_{ji}P_i$ avec W_{ij} la proba de transition et $P_j = D(y_j,t)\,dy_j$

Fokker-Planck :

- $\dfrac{\partial D(y,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\partial^n}{\partial y^n} Mn(y)\ D(y,t)$ avec $Mn(y) = \dfrac{1}{n!} \lim_{\delta t \to 0} \dfrac{\overline{(\delta y)^n}}{\delta t}$

Processus aléatoire gaussien stationnaire :

- Fonction de corrélation : $g(t'-t) = \overline{y(t)\,y(t')}$

Analyse harmonique :

- Densité spectrale : $J(\omega) = \lim_{T\to\infty} \dfrac{2\pi}{T} \overline{\left|\tilde{y}(\omega)\right|^2}$
- Wiener – Khintchine : $g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\ J(\omega)\ e^{-i\omega t}$ et $J(\omega) = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt\ g(t)\ e^{i\omega t}$

Système en contact avec un thermostat :

- $\dfrac{W_{ij}}{W_{ji}} = e^{-\beta\left(E_i - E_j\right)}$

Modèle de Langevin

Equation du mouvement :

- $m\dfrac{d}{dt}v(t)=-m\gamma v(t)+F(t)$ avec $F(t)$ la force aléatoire et $\overline{F(t)}=0$

Relation fluctuation – dissipation :

- $\overline{v^2(t)}\rightarrow\dfrac{D}{\gamma}$ et $\gamma=\dfrac{mD}{kT}$
- $g(t)=2Dm^2\delta(t)$ pour des temps très courts.
- $D=\dfrac{1}{2m^2}\int_{-\infty}^{+\infty}dt\ g(t)$
- Il y a deux échelles de temps : rapide (vitesse) et lente (corrélation).

Equation de Fokker-Planck dans le modèle de Langevin :

- $\dfrac{\partial}{\partial t}P(v,t)=\gamma\dfrac{\partial}{\partial v}\big(v\,P(v,t)\big)+D\dfrac{\partial^2}{\partial v^2}P(v,t)$

Théorie macroscopique

Equation de conservation :

- $\frac{d}{dt}A_i(a,t) = -\sum_{b\neq a}\phi_i(a\to b) + \phi_i(sources \to a)$

- Avec $A_i(a,t) = \int_V d^3r\rho_i(\vec{r},t)$ et $\sum_{b\neq a}\phi_i(a\to b) = \int \overrightarrow{dS}.\vec{j}_i = \int d^3r\vec{\nabla}.\vec{j}_i$

Equation de conservation locale :

- $\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{j}_i = \sigma_i$ et $\vec{j}_i$ la densité de courant.

Variable locale :

- $\gamma_i(a) = \frac{\partial S(a)}{\partial A_i(a)}$
- $S_{tot} = \sum_a S(a) = \sum_{i,a}\gamma_i(a)\,A_i(a)$

$A_i = N \quad \gamma_N = \frac{-\mu}{T}$

$A_i = E \quad \gamma_E = \frac{1}{T}$

$A_i = P_\alpha \quad \gamma_{P_\alpha} = \frac{-u_\alpha}{T} \quad = -\frac{P_\alpha}{m}\frac{1}{T}$

Affinités :

- Déviation par rapport à l'équilibre.

- $\Gamma_i(a,b) = \gamma_i(b) - \gamma_i(a) = -\Gamma_i(b,a)$

- $\phi_i(a\to b) = \sum_j L_{ij}(a,b)\;\Gamma_j(a,b)$

Relation de réciprocité d'Onsager :

- $L_{ij}(a,b) = L_{ji}(b,a) = L_{ji}(a,b)$

Equation de diffusion :

- Solution de la forme $\frac{\partial}{\partial t}A(\vec{r},t) = D\nabla^2 A(\vec{r},t)$ avec D le coefficient de diffusion.

Equation de transport :

- $j_\alpha^i(\vec{r},t) - j_\alpha^{éq} = \sum_{j,\beta} L_{ij}^{\alpha\beta}\partial_\beta\gamma_j(\vec{r},t)$

Courant d'énergie :

- $\overrightarrow{j_E}\left(\vec{r},t\right)=-\kappa\vec{\nabla}T\left(\vec{r},t\right)$ à $\overrightarrow{j_N}=0$ et $\overrightarrow{j_E}=L_{EE}\vec{\nabla}\left(\frac{1}{T}\right)+L_{EN}\vec{\nabla}\left(-\frac{\mu}{T}\right)$.

<u>Continuité de la densité d'énergie</u> :

- $\frac{\partial \in}{\partial t}+\vec{\nabla}.\overrightarrow{j_E}=0$ avec $\in$ la densité d'énergie

<u>Loi de Fick</u> : courant de particules

- $\overrightarrow{j_N}\left(\vec{r},t\right)=-D\vec{\nabla}n\left(\vec{r},t\right)$ à T=cste et $\overrightarrow{j_N}=L_{NE}\vec{\nabla}\left(\frac{1}{T}\right)+L_{NN}\vec{\nabla}\left(-\frac{\mu}{T}\right)$.

<u>Continuité de la densité d'entropie</u> :

- $\frac{\partial s}{\partial t}+\vec{\nabla}.\overrightarrow{j_s}=\sigma_s$

<u>Courant d'entropie</u> :

- $\overrightarrow{j_s}=\sum_i \gamma_i \overrightarrow{j_i}+\frac{P}{T}\vec{u}=\frac{1}{T}\overrightarrow{j_E}-\frac{\mu}{T}\overrightarrow{j_N}+\frac{P}{T}\vec{u}$

<u>Conservation de la masse</u> :

- $\frac{\partial \rho}{\partial t}+\vec{\nabla}.\overrightarrow{j_{él}}=0$ (conducteur)

- Puissance = Courant x Surface
- $j_z^G=-v_L n$ le nombre de particules de surfaces par unité de temps $m^{-2}s^{-1}$.
- $\overrightarrow{j_{él}}=\overrightarrow{j_N}=\frac{I}{S}\hat{u}$

Théorie cinétique

Densité de particules :

- $n(\vec{r},t)=\int d^3p\ f(\vec{r},\vec{p},t)$ avec $f(\vec{r},\vec{p},t)$ la fonction de distribution.

Section efficace différentielle de diffusion :

- $\sigma(v,\Omega')$

Section efficace totale :

- $\sigma_{tot}=\int d\Omega'\ \sigma(v,\Omega')$. Si le potentiel de diffusion est isotrope alors $\sigma(v,\Omega')\equiv\sigma(v)=\dfrac{\sigma_{tot}}{4\pi}$ indépendant de la direction.

Nombre de collisions par unité de temps et de volume :

- $$\frac{dN}{dtdV}=F\ n_d\ \sigma(v,\Omega')\ d\Omega'$$

  avec $F=nv$ le flux incident, n_d la densité de diffuseur et $d\Omega'$ la direction de diffusion.

- $\dfrac{dN_{12}}{dtdV_2}=n_1n_2v\sigma(v_1,v_2,\Omega')d\Omega'$ (collisions de 2 sur 1) avec le flux $F_2=n_2v$ de particules incidentes et la vitesse relative (invariance galiléenne) $v=\left|\vec{v_2}-\vec{v_1}\right|$

Temps de vol :

- $\tau^{-1}=n_dv\int d\Omega'\ \sigma(v,\Omega')$ donc $\tau\approx\dfrac{1}{n\langle v\rangle\sigma_{tot}}$

Libre parcours moyen :

- $$l\approx\frac{1}{n\sigma_{tot}}$$

Théorème de Liouville :

- $d^3r\ d^3p=d^3r'\ d^3p'$

Equation de la dynamique :

- $\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\vec{v}.\vec{\nabla}_{\vec{r}}+\vec{F}.\vec{\nabla}_{\vec{p}}\right)f(\vec{r},\vec{p},t)=C[f]$ avec $C[f]$ le terme de collisions.

$$\tau = \frac{1}{n_d v \sigma_t} \qquad \ell = \frac{1}{n_d \sigma_t}$$

$$C[f] = v n_d \int d\Omega' \, \sigma(v, \Omega') \left[f(\vec{r}, \vec{p}', t) - f(\vec{r}, \vec{p}, t) \right]$$

$$C[f_1] = -\frac{f_1}{\tau} = -n_d v \sigma f_1$$

$$= \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_r + \vec{F} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} \right) f_0 \quad \Rightarrow \quad f_1 = -\frac{\ell}{v} \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} + \vec{F} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} \right) f_0$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{J}_N &= \int d^3p \, \vec{v} f_1 = -\int d^3p \, \tau \, \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) f_0 \\ \vec{J}_E &= \int d^3p \, \vec{v} \, \varepsilon f_1 = -\int d^3p \, \tau \varepsilon \, \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) f_0 \end{aligned}\right\} \vec{F} = 0$$

Divers :

$$z = e^{\alpha} = n \lambda^3 \qquad \mu = kT \ln(n \lambda^3)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{h^2}{2\pi m k T}}$$

$$\frac{1}{(2\pi m k T)^{3/2}} \int d^3p \, e^{-\frac{p^2}{2mkT}} = 1$$

$$\int d^3p \, (\vec{p} \cdot \vec{a}) \vec{p} \, g(p) = \frac{\vec{a}}{3} \int d^3p \, p^2 g(p)$$