Table des matières

Première partie

Lexique

- Diagonalisation :
  - recherche de la solution à un problème physique
  - opérateur : *description* action physique (*ex : déplacement*)
  - fonctions propres : solutions *décrivant l'objet*
  - valeurs propres : coefficients multiplicatifs de la solution

- Diagonalisation simultanée :
  - deux problèmes qui peuvent être décris indépendamment l'un de l'autre
  - les hypothèses la permettent, les petits détails ne la permettent pas

- Construction d'un opérateur :
  corde : $\lambda_0 = L$, $\omega_0 = 2\pi \dfrac{v}{\lambda_0}$
  $\lambda_n = \dfrac{\lambda_0}{n+1} \quad \omega_n = 2\pi \dfrac{v}{\lambda_n}$
  On passe du premier au deuxième ordre : par récurrence, on construit l'opérateur

  $\Longrightarrow$ tous les états sont discrets
  $\Longrightarrow$ on peut standardiser plus facilement les solutions *(ici : base semi-infinie)*

  fondamental : niveau minimum d'énergie $\Rightarrow$ minimum et maximum pour $\overrightarrow{L}$

Deuxième partie

Cours

Chapitre 1

Moment Angulaire

$$\text{Opérateur : } \underline{J}\,; \quad [J_x, J_y] = \imath J_z\,, \quad [J_i, J_j] = \imath \sum_m \varepsilon_{ijm} J_m$$

On peut mesurer simultanément $\underline{J}^2$ et $\underline{J_k}$ → typiquement $\underline{J_z}$

$$J_\pm = J_x \pm \imath J_y$$

Valeurs propres : $|j, m\rangle$ états propres

$$J^2|j, m\rangle = j(j+1)|j, m\rangle$$
$$J_z|j, m\rangle = m|j, m\rangle$$

$$J_+|j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\,|j, m+1\rangle \qquad J_+|j, j\rangle = 0$$
$$J_-|j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\,|j, m-1\rangle \qquad J_-|j, -j\rangle = 0$$

$$\langle j', m' \left| J^2 \right| j, m\rangle = j(j+1)\delta_{j,j'}\delta_{m,m'}$$
$$\langle j', m' \left| J_z \right| j, m\rangle = m\,\delta_{j,j'}\delta_{m,m'}$$
$$\langle j', m' \left| J_\pm \right| j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\,\delta_{j,j'}\,\delta_{m',(m\pm 1)}$$

Rotation : $\mathcal{R}(\theta, \varphi) = \mathcal{R}_z(\varphi)\,\mathcal{R}_y(\theta)$

Attention : pas de commutation entre les rotations

$$U\left[\mathcal{R}(\theta,\varphi)\right] = e^{-\imath\varphi J_z}\, e^{-\imath\theta J_y} \text{ : opérateur de rotation}$$

$$D^{(j)}_{m',m}\left[\mathcal{R}(\theta,\varphi)\right] = \left\langle j,m' \left| e^{-\imath\varphi J_z}\, e^{-\imath\theta J_y} \right| j,m \right\rangle$$

$$\left[U(\mathcal{R}), \underline{J}^2\right] = 0$$

$$D^{(j)}_{m',m}\left[\mathcal{R}(\theta,\varphi)\right] = e^{-\imath m'\varphi} d^{(j)}_{m',m}(\theta)$$

$$\text{avec } d^{(j)}_{m',m}(\theta) = \left\langle j,m' \left| e^{-\imath\theta J_y} \right| j,m \right\rangle$$

$\Longrightarrow$ on ne peut pas sommer les rotations selon y, selon z on peut :

$$d^{(j)}_{m',m}(\theta_1+\theta_2) = \sum_{m''} d^{(j)}_{m',m''}(\theta_2)\, d^{(j)}_{m'',m}(\theta_1)$$

Représentation irréductible : la plus simple possible (dans la bonne base)

1.1 Rotation de 2π

$$\langle j,m' \left| U\left[\mathcal{R}(\theta,\varphi)\right] \right| j,m\rangle = \langle j,m' \left| U\left[\mathcal{R}(2\pi)\right] \right| j,m\rangle$$

$$= \begin{cases} e^{-2\imath\pi m}\delta_{m,m'} = \delta_{m,m'} & \text{si } j \text{ entier} \\ e^{-2\imath\pi m}\delta_{m,m'} = -\delta_{m,m'} & \text{si } j \text{ demi-entier} \end{cases}$$

si j est demi-entier, il faut faire 4π pour revenir à l'état initial

Que se passe-t-il à la fonction d'onde sous une rotation de référentiel ?

$$\psi(\underline{r}') = \psi(\underline{r})$$

$\Rightarrow$ Rotation autour de $\hat{z}$: $x,y,z \to x',y',z'$

$$x' = x\,\cos\varphi - y\,\sin\varphi$$

$$y' = x\,\sin\varphi + y\,\cos\varphi$$

$$z' = z$$

$$\psi'(\underline{r}) = \psi(\mathcal{R}^{-1}\underline{r})$$

rotations infinitésimales

$$U\left[\mathcal{R}_z(\varphi)\right] = e^{-\imath\varphi J_z} \simeq \mathbb{I} - \imath\varphi J_z$$

$$\left[\,(\mathbb{I} - \imath\varphi J_z)\,\psi(\underline{r})\right] \simeq \psi(x + y\varphi, -\varphi x + y, z)$$

$$\simeq \psi(\underline{r}) + \varphi y\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \varphi x\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

Rappel : $P_{x,y} = -\imath\hbar\dfrac{\partial}{\partial x, y}$

$$\Rightarrow \left[\,(\mathbb{I} - \imath\varphi J_z)\,\psi(\underline{r})\right] \simeq \psi(\underline{r}) + \imath\varphi\left[y.P_x - x.P_y\right]\psi(\underline{r})$$

$$\left[J_z\psi\right](\underline{r}) = \Big[\underbrace{(X.P_y - Y.P_x)}_{L_z}\psi\Big](\underline{r})$$

$$\left[J_z\psi\right](\underline{r}) = \left[\underline{L_z}\psi\right](\underline{r})$$

Si on fait une rotation de 2π, on retombe sur le même état
$\Rightarrow$ fonction d'onde paire
$\Rightarrow j$ est entier.

$\underline{L}$ a les mêmes propriétés que $\underline{J}$ pour j entier.

$$L_z = -\imath\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

1.2 Fonctions d'Onde : Harmoniques Sphériques

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = Y_l^m(\hat{r}) = \langle\hat{r}|l,m\rangle$$

- $\left[\underline{L}^2 Y_l^m(\theta,\varphi)\right] = \langle\hat{r}|\underline{L}^2|l,m\rangle = l(l+1)Y_l^m(\theta,\varphi)$
- $\left[\underline{L_z} Y_l^m(\theta,\varphi)\right] = m\,Y_l^m(\theta,\varphi)$

$$-\imath\frac{\partial}{\partial\varphi}Y_l^m = m\,Y_l^m(\theta,\varphi(\hat{r})$$

$$\Rightarrow Y_l^m(\hat{r}) = e^{-\imath m\varphi}f_l^m(\theta) \Rightarrow \text{ factorisation des angles}$$

Rotateur sphérique :

- Moment d'inertie : $I = \mu r_0^2$, μ : masse réduite, r_0 : distance au centre de masse

- ω : vitesse de rotation

$$H_{clas} = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{(I\omega)^2}{2I} = \frac{p^2}{2I}$$

$$H_q = \frac{L^2}{2I} \qquad E_l = \frac{l(l+1)}{2I}, \quad E_{l+1} - E_l = \frac{l+1}{I}$$

Propriétés des $Y_l^m(\hat{r})$

– Base sur la sphère de $r = 1$

$$\int d\Omega \, \left[Y_{l'}^{m'}(\theta, \varphi) \right]^* [Y_l^m(\theta, \varphi)] = \delta_{mm'} \, \delta_{ll'}$$

$$d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = d\hat{r}$$

– Développement possible de toute fonction sur les $Y_l^m(\hat{r})$

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l,m} C_{lm} Y_l^m(\theta, \varphi)$$

$$C_{lm} = \int d\Omega \, [Y_l^m(\theta, \varphi)]^* \, f(\theta, \varphi)$$

– $l = 0$, $Y_0^0(\theta, \varphi) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi}}$ *scalaire*

– $l = 1$, $Y_1^1(\theta, \varphi) = \sqrt{\dfrac{3}{4\pi}} \cos\theta = \sqrt{\dfrac{3}{4\pi}} \hat{r_0}$

$$Y_1^{\pm}(\theta, \varphi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \, e^{\pm\imath\varphi} \sin\theta = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \, \hat{r_\pm}$$

$$\hat{r} = (\sin\theta \, \cos\varphi, \sin\theta \, \sin\varphi, \cos\varphi)$$

Chapitre 2

Désintégrations

$$C \to A + B \qquad \text{en général}$$
$$A^* \to A + \gamma$$

A^* : *état excité*
A : *état non excité* $\not\Rightarrow$ *état fondamental*
γ : *photon*

2.1 Invariances du Hamiltonien

– rotation (du repère dans lequel on le décrit)

– parité : $\Pi(x) = -x$ (vrai pour toutes les directions)

Définitions :
* $Y = e^{-\imath\pi J_y}$
* $\mathcal{Y} = Y\Pi = e^{-\imath\pi J_y}\Pi = \Pi e^{-\imath\pi J_y}$ *réflexion séculaire*

$$Y^{-1}J_zY = -J_z$$
$$Y^{-1}J_\pm Y = -J_\mp$$

On veut connaître la fonction d'onde et au lieu de la chercher, on modifie les opérateurs car on connaît la fonction d'onde.

$$J_x \underset{Y}{\to} -J_x \qquad J_y \underset{Y}{\to} J_y \qquad J_\pm = J_x \pm \imath J_y$$
$$\Rightarrow J_\pm \to -J_\mp \quad \text{et} \quad J_zY = -YJ_z \quad \text{et} \quad J_\pm Y = -YJ_\mp$$

$$J_z\left(Y|j,m\rangle\right) = -YJ_z|j,m\rangle = -mY|j,m\rangle$$
$$Y|j,m\rangle = e^{\imath\alpha(j,m)}|j,-m\rangle$$

Procédure : passage d'un état au précédent et suivant

$$
\begin{aligned}
J_+ \left(Y|j,m\rangle\right) &= e^{\imath\alpha(j,m)} J_+|j,-m\rangle = e^{\imath\alpha(j,m)} \sqrt{j(j+1)-m(m+1)}\,|j,-m+1\rangle \\
&= -YJ_-|j,m\rangle = -\sqrt{j(j+1)-m(m-1)}\,Y|j,m-1\rangle \\
&= -\sqrt{j(j+1)-m(m-1)}\,e^{\imath\alpha(j,m-1)}|j,-m+1\rangle
\end{aligned}
$$

$$\underline{e^{\imath\alpha(j,m)} = -e^{\imath\alpha(j,m-1)}} \quad \text{règle pour le changement de phase}$$

$$
\begin{aligned}
Y^2 = \mathbb{I} \quad Y^2|j,m\rangle &= e^{\imath\alpha(j,m)} e^{\imath\alpha(j,m-1)}|j,m\rangle \\
&= (-1)^{2m} e^{2\imath\alpha(j,m)}|j,m\rangle \\
&= (-1)^{2j}|j,m\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e^{2\imath\alpha(j,m)} &= (-1)^{2(j\pm m)} \\
e^{\imath\alpha(j,m)} &= (-1)^{j\pm m}
\end{aligned}
$$

$$
e^{\imath\alpha(j,m)} = \begin{array}{l} \qquad (-1)^{j+m} \\ \nearrow \\ \\ \searrow \\ \qquad (-1)^{j-m} \end{array}
$$

si j entier, on a le même résultat
si j demi-entier, alors on a un résultat différent, et on veut le positif

$$\text{donc } e^{\imath\alpha(j,m)} = (-1)^{j-m}$$

$$
\begin{aligned}
Y|j,m\rangle &= (-1)^{j-m}|j,-m\rangle \\
Y^{-1}|j,m\rangle &= (-1)^{j+m}|j,-m\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y^{-1}J_\pm Y &= -J_\mp \\
J_x \pm \imath J_y &= -J_x \mp \imath J_y
\end{aligned}
$$

Voir inversement de la polarisation électro-magnétique par réflexion.

$\Rightarrow$ inversion de l'axe de quantification par réflexion

2.2 Rappels : polarisation

$$|D\rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}}\,[|x\rangle + \imath|y\rangle)$$
$$|G\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|x\rangle - \imath|y\rangle)$$
$$|\theta\rangle = \cos\theta\,|x\rangle + \sin\theta\,|y\rangle$$
$$|\theta_\perp\rangle = -\sin\theta\,|x\rangle + \cos\theta\,|y\rangle$$

Projecteurs : $P_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [P_x, P_y] = 0, [\theta, \theta_\perp] = 0$

$[P_{\substack{x\\y}}, \theta] \neq 0, \quad P_\theta = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\,\cos\theta \\ \sin\theta\,\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}, \quad P_{\theta_\perp} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$

$$P_D = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\imath \\ \imath & 1 \end{bmatrix}, \quad P_G = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \imath \\ -\imath & 1 \end{bmatrix}$$
$$P_D|D\rangle = |D\rangle, \quad P_G|G\rangle = [G\rangle$$

$$\Sigma_z = P_D - P_G = \begin{bmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{bmatrix} : \text{ rotation } \textit{spéciale} \text{ autour de } \hat{z} = J_z$$
$$\Sigma_z|D\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \imath \end{bmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \imath \end{bmatrix} = |D\rangle$$
$$\Sigma_z|G\rangle = -|G\rangle$$

Les états $|G\rangle$ et $|D\rangle$ sont les états propres du moment angulaire intrinsèque du photon.

$$\exp\{-\imath\theta\Sigma_z\} \simeq \mathbb{I} - \imath\theta\Sigma_z + \frac{(-\imath\theta)^2}{2!}\Sigma_z^2 + \frac{(-\imath\theta)^3}{3!}\Sigma_z^3 + \dots$$
$$\text{or } \Sigma_z = \begin{bmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_z^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}$$

$$\exp\{-\imath\theta\Sigma_z\} = \mathbb{I} - \imath\theta\Sigma_z + \frac{(-\imath\theta)^2}{2!}\Sigma_z^2 + \frac{(-\imath\theta)^3}{3!}\Sigma_z^3 + \dots$$
$$= \mathbb{I}\left(1 + \frac{(-\imath\theta)^2}{2!} + \frac{(-\imath\theta)^4}{4!} + \dots\right) + \Sigma_z\left(\frac{-\imath\theta}{1!} + \frac{(-\imath\theta)^3}{3!} + \dots\right)$$

$$= \cos\theta\, \mathbb{I} - \imath \sin\theta\, \Sigma_z$$

$$e^{-\imath\theta\Sigma_z} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} : \text{ rotation générique de } \theta \text{ autour de } \hat{z} \text{ pour la polarisation d'un photo}$$

$$e^{-\imath\theta\Sigma_z}|x\rangle = |\theta\rangle$$
$$e^{-\imath\theta\Sigma_z}|y\rangle = |\theta_\perp\rangle$$

$$e^{-\imath\theta\Sigma_z}|D\rangle = e^{-\imath\theta}|D\rangle$$
$$e^{-\imath\theta\Sigma_z}|G\rangle = e^{\imath\theta}|G\rangle$$

le spin du photon est équivalent au moment angulaire

Vecteur axial ou pseudo-vecteur : résulte d'un produit vectoriel (*exemple :* $\overrightarrow{B}$)

$$\hat{x} \wedge \hat{y} = \hat{z}$$
$$\hat{x} \wedge (-\hat{y}) = -\hat{z}$$

Le moment angulaire (spin du photon) est un vecteur axial car il change de signe.

Correspondance entre $\Sigma_Z \longleftrightarrow J_z$
$\Rightarrow$ spin = moment angulaire $\rightarrow$ pseudo-vecteur

$$\text{A priori } : m = \begin{cases} +1 \\ 0 \\ -1 \end{cases} \quad \textit{hélicité :} \text{ projection sur l'axe de propagation}$$

Identification : $|D\rangle = |j = 1, m = 1\rangle = |1, 1\rangle$ *photon*
$|G\rangle = |j = 1, m = -1\rangle = |1, 1\rangle$

angle de propagation parallèle à $\hat{z}$

On s'attend à trois états.
On va montrer que les photons (les particules de masse nulle en général) ne peuvent prendre que les valeurs extrémales de m.
L'Hamiltonien permet aux photons de prendre ces deux valeurs.
$\Rightarrow$ *le photon ne peut pas être polarisé rectilignement*
l'état de polarisation rectiligne correspond à une superposition d'états.

$|D\rangle$, $|G\rangle$: base ?

$$Y|x\rangle = -|x\rangle \qquad Y|y\rangle = |y\rangle$$

$$Y|D\rangle = T\left[\frac{-1}{\sqrt{2}}\left(|x\rangle + \imath|y\rangle\right)\right] = \frac{-1}{\sqrt{2}}\left(-|x\rangle + \imath|y\rangle\right) = |G\rangle$$

$$Y|G\rangle = |D\rangle$$

$$\text{donc} \qquad \{|G\rangle, |D\rangle\} \text{ est une base}$$

$$Y|D\rangle = Y|1,1\rangle = (1)^{1-1}|1,-1\rangle = |1,-1\rangle$$

$$Y|G\rangle = Y|1,-1\rangle = (-1)^{1-(-1)}|1,1\rangle = |1,1\rangle$$

$$|D\rangle, |G\rangle \leftrightarrow \hat{r_\pm} = \frac{\hat{r_x} \pm \imath\hat{r_y}}{\sqrt{2}} \qquad \hat{r_\pm} = Y_1^\pm = \mp\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{\hat{r_x} \pm \imath\hat{r_y}}{\sqrt{2}}$$

2.3 Transition

$$A^* \to A + \gamma$$

$A^* \longrightarrow J, j, m$
$A \longrightarrow J', j', m'$
$\gamma \longrightarrow \Sigma_z, 1, \mu$

Conservation du moment angulaire :

$$\underline{J} = \underline{J'} + \underline{S} + \underline{L}$$

$\underline{L}$: moment orbital du spin.

Projection selon z : $m = m' + \mu + m_l$

Remarque : $m_l = 0$ toujours.

1. $e^{\imath\underline{p}.\underline{r}} = e^{\imath pz}$ invariance par rotation autour de $\hat{z}$.
   $\hookrightarrow$ représentation du photon : onde plane se propageant selon $\hat{z}$.

2. $L_z e^{\imath pz} = -\imath\frac{\partial}{\partial\varphi}e^{\imath pz} = 0$

$$\Rightarrow \textit{on ne considère que } \underline{S} \text{ pas } \underline{L}$$

$$\Rightarrow m = m' + \mu \qquad \text{or } \mu = \pm 1$$

$$\Rightarrow \quad m = m' \pm 1$$

$$\text{Deux cas : } \begin{cases} m = m' + 1 & \text{droit} \\ m = m' - 1 & \text{gauche} \end{cases}$$

Le photon a une projection bien définie +1 ou −1 mais si on le regarde sous une direction bizarre, on obtient un mélange de +1, 0 et −1.

$A^*, m = 0, j = 0$
$A, m' = 0, j' = 0$ transition impossible : *transition interdite* : $A^* \to A \to$
Règle de sélection.
on peut obtenir cette transition mais avec deux photons ce qui est très peu probable.

$\underline{j = 1, j' = 0}$ $\to$ Diagramme de Kastler :

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{m=-1} & & \underline{m=0} & & \underline{m=+1} & & j=1 \\ \mu=-1 & \diagdown & & \diagup & \mu=+1 & & \\ & & \overline{m'=0} & & & & j'=0 \end{array}$$

On ne peut pas avoir la transition $j = 1, m = 0$ vers $j' = 0, m' = 0$ avec un seul photon.
$-1 = 0 - 1 \Rightarrow$ gauche
$+1 = 0 + 1 \Rightarrow$ droit

On veut vérifier les probabilités de transition par unité de temps. (*si* $t \to +\infty$ *elles vont avoir lieu ...*)

T : probabilité de transition par unité de temps

$$\hat{z}, \theta = 0$$

Amplitude de probabilité : $a = \langle D, \theta = 0|T|j = 1, m = 1\rangle = \langle D, 0|T|1, 1\rangle$
c'est l'amplitude d'avoir la transition de l'état $|1, 1\rangle$ vers l'état $|0, 0\rangle$ en émettant un photon d'axe $\hat{z}$ ($\theta = 0$) avec une polarisation droite D

$$b = \langle G, \theta = 0|T|j = 1, m = -1\rangle = \langle G, 0|T|1, -1\rangle$$

les transitions ne sont que des transitions réfléchies

$$\Rightarrow \text{ les probabilités doivent être les mêmes.}$$

$$\Rightarrow \text{ il peut y avoir un terme de phase sur les amplitudes.}$$

$$\Rightarrow \underline{|a| = |b|}$$

Recherche du facteur de phase :

$$a = \langle D,0|T|1,1\rangle = \langle D,0|\mathcal{Y}^{-1}T\mathcal{Y}|1,1\rangle$$
$$= \Big(\langle D,0|\mathcal{Y}^{-1}\Big)T\Big(\mathcal{Y}|1,1\rangle\Big)$$
$$= \langle G,0|T|1,-1\rangle \eta_\gamma \eta_{A^*}\eta_A$$

η_γ : état du photon
η_{A^*} : état excité
η_A : état de l'atome

$$a = \eta_\gamma \eta_{A^*}\eta_A b$$

$\eta_\gamma = -1$ car le moment angulaire (spin du photon) change de signe avec une réflexion.

$\eta_{A^*}\eta_A = \eta$: contribution de l'atome.

$$\Pi|X,\underline{p}\rangle = \eta_X|X,-\underline{p}\rangle$$

1. $\eta = -1 \quad \Rightarrow \eta_\gamma\eta = +1 \Rightarrow a = b$ *transition par dipôle électrique*
2. $\eta = +1 \quad \Rightarrow \eta_\gamma\eta = -1 \Rightarrow a = -b$ *transition par dipôle magnétique*

Pour $\theta \neq 0$

$$|D,\theta\rangle = U\left[R_{\hat{y}}(\theta)\right]|D,0\rangle, \quad |G,\theta\rangle = U\left[R_{\hat{y}}(\theta)\right]|G,0\rangle$$

Est-ce que cela permet la transition $|1,0\rangle \to |0,0\rangle$?

Comme on regarde dans la direction θ, le photon peut agir différemment que le long de l'axe de quantification.

$$a_D^{m=0}(\theta) = \langle D,\theta|T|1,0\rangle = \langle D,0|U^\dagger\left[R_{\hat{y}}(\theta)\right]T|1,0\rangle$$
$$= \langle D,0|TU^\dagger\left[R_{\hat{y}}\right]|1,0\rangle$$
$$= \langle D,0|T\left(\sum_m |1,m\rangle\langle 1,m|\right)U^\dagger\left[R_{\hat{y}}(\theta)\right]1,0\rangle$$
$$a_D^{m=0}(\theta) = \underbrace{\langle D,\theta|T|1,1\rangle}_{a}\underbrace{\langle 1,1|U^\dagger\left[R_{\hat{y}}(\theta)\right]|1,0\rangle}_{d^{(1)}_{0,1}(\theta)}$$

$$d^{(1)}(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+\cos\theta) & \frac{-1}{\sqrt{2}}\sin\theta & \frac{1}{2}(1-\cos\theta) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta & \frac{1}{2}(1+\cos\theta) & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta \\ \frac{1}{2}(1-\cos\theta) & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta & \frac{1}{2}(1+\sin\theta) \end{bmatrix}$$

$$a_D^{m=0}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\theta\, a$$

$$a_G^{m=0}(\theta) = \langle G,0|T|1,0\rangle = \dots$$
$$a_G^{m=0}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\theta\, b$$

Polarisation finale rectiligne :

$$|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|D\rangle + |G\rangle)$$

$$|y\rangle = \frac{\imath}{\sqrt{2}}(|D\rangle + |G\rangle)$$

$$a_x^{m=0} = \langle X,\theta|T|1,0\rangle = \langle X,0|U^\dagger\left[R_{\hat{y}}(\theta)\right]T|1,0\rangle$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{2}} \underbrace{\langle D,0|T|1,1\rangle}_{a} \underbrace{\langle 1,1|U^\dagger\left[R_{\hat{y}}(\theta)\right]|1,0\rangle}_{d^{(m)}_{0,1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\langle G,0|T|1,-1\rangle}_{b} \underbrace{\langle 1,-1|U^\dagger\left[R_{\hat{y}}(\theta)\right]|1,0\rangle}_{d^{(m)}_{0,-1}}$$
$$= \frac{-a}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta + \frac{b}{\sqrt{2}}\frac{-\sin\theta}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(a+b)\sin\theta$$

$a_x^{m=0}(\theta) = -\frac{1}{2}(a+b)\sin\theta$: émission rectilignement polarisée selon $|x\rangle$

$$a_y^{m=0}(\theta) = \frac{\imath}{2}(a-b)\sin\theta$$

Si $a = b \Rightarrow$ émission rectilignement polarisée selon $|x\rangle$ possible et parfaite et aucune selon $|y\rangle$.
Si $a = -b \Rightarrow$ on a l'inverse.

On peut donc distinguer ces deux classes de polarisation

$a = b \Rightarrow \eta = 1, \eta_\gamma = -1 \Rightarrow$ changement de parité des états final et initial

$a = -b \Rightarrow \eta = -1, \eta_\gamma = -1 \Rightarrow$ parité des états final et initial égale

Donc il y a des règles de sélection selon une direction d'observation.

Chapitre 3

Composition des Moments Angulaires

On veut voir comment plusieurs moments angulaires réagissent, inter-agissent.

3.1 Composition de deux spins $\frac{1}{2}$

$$\overrightarrow{S_1}, \overrightarrow{S_2} : \qquad \left[\overrightarrow{S_1}, \overrightarrow{S_2}\right] = \overrightarrow{0} \quad \Longrightarrow H = H_1 \otimes H_2$$

$$\begin{gathered} H = \left\{S_1^2, S_2^2, S_{1z}, S_{2z}\right\} \\ |++\rangle, |--\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle \\ |\varepsilon\rangle = |\varepsilon_1, \varepsilon_2\rangle \end{gathered}$$

S_1^2 et S_2^2 ont des actions connues $\left(\frac{3}{4}\right)$, donc on les enlève, on fait de même pour les $\frac{1}{2}$.

$$\Rightarrow |\varepsilon\rangle = |\varepsilon_1, \varepsilon_2\rangle$$

$$\begin{gathered} S_{1,2}^2|\varepsilon_1, \varepsilon_2\rangle = \frac{3}{4}|\varepsilon_1, \varepsilon_2\rangle \\ S_{1,2;z}|\varepsilon_1, \varepsilon_2\rangle = \varepsilon_{1,2}|\varepsilon_1, \varepsilon_2\rangle \end{gathered}$$

On introduit $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{S_1} + \overrightarrow{S_2}$.

$$U\left[\mathcal{R}_{\hat{n}}(\theta)\right] = e^{-\imath\theta(\overrightarrow{S}.\overrightarrow{n})} = e^{-\imath\theta(\overrightarrow{S_1}.\overrightarrow{n} + \overrightarrow{S_2}.\overrightarrow{n})} = e^{-\imath\theta\overrightarrow{S_1}.\overrightarrow{n}}\, e^{-\imath\theta\overrightarrow{S_2}.\overrightarrow{n}}$$

donc c'est bien une rotation, et il décrit bien le système.

$\left\{S^2, S_z, S_1^2, S_2^2\right\}$: on prend S_1^2 et S_2^2 car ce sont des scalaires, donc ils commutent avec S^2 et S_z.

$$S_z : \begin{array}{ccc} \uparrow\uparrow & \rightarrow & +1 \\ \uparrow\downarrow \; \downarrow\uparrow & \rightarrow & 0 \\ \downarrow\downarrow & \rightarrow & -1 \end{array}$$