Master Ωmega2
Université de Nice-Sophia Antipolis
Théories Relativistes de la Gravitation

Examen du 12 Novembre 2008
Durée : 3 heures

Orbites circulaires dans une métrique de Kerr

On considère la métrique de Kerr en coordonnées de Boyer-Lindquist, c'est-à-dire sous la forme donnée dans les transparents TN13 ou TN 14. On travaillera dans le système de coordonnées correspondant. On considérera que $a \geq 0$, ce qui ne restreindra pas la généralité de l'étude. On considérera aussi que $a < m$ (ce qui implique l'existence d'horizons).

On s'intéressera aux orbites circulaires (r constant) libres dans le "plan" (sous-variété) $\theta = \pi/2$. On ne considérera que la région de l'espace-temps à l'extérieur de l'horizon externe de la métrique considérée.

Dans un premier temps, NE PAS CALCULER LES COMPOSANTES DE LA CONNEXION !!!! On ne calculera les termes indispensables que lorsque cela sera nécessaire et explicitement demandé.

Pour les notations indicielles, on écrira $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \varphi)$, avec pour l'interprétation de ces dernières variables celle correspondant aux notations du cours.

1) Dans la métrique de Kerr, seuls les termes diagonaux de la métrique et g_{03} (et g_{30}) sont non nuls.

Quelles sont les composantes contravariantes $g^{\alpha\beta}$ non-nulles de la métrique ? (On ne demande pas de calculer explicitement ces composantes.)

2) L'équation des geodésiques s'écrit, en représentation affine

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0.$$

L'équation $\lambda = 2$ se réduit à une trivialité, car on est dans le plan $\theta = \pi/2$ (on admet ce point, qui n'est pas difficile à démontrer). Il ne faut donc écrire que les équations pour $\lambda = 0, 1, 3$, ou tout système équivalent. On choisira d'écrire les équations pour $\lambda = 1$ et $\lambda = 3$, et l'équation résultant de l'expression du ds^2.

Ecrire ces 3 équations, les 2 premières en fonction des coefficients $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$ utiles.

3) Calculez les coefficients $\Gamma^\lambda_{00}, \Gamma^\lambda_{03}$ et Γ^λ_{33} pour $\lambda = 3$. (La méthode "directe" est plus indiquée que la méthode lagrangienne.)

Qu'en concluez-vous concernant $d\varphi/d\tau$? Ce résultat vous surprend-il ?

4) Calculez les coefficients $\Gamma^\lambda_{00}, \Gamma^\lambda_{03}$ et Γ^λ_{33} pour $\lambda = 1$, en fonction des $g_{\alpha\beta}$ et des $g^{\alpha\beta}$ nécessaires. (Il n'est pas nécessaire, à ce niveau, de remplacer ces grandeurs par leurs expressions.)

En déduire la forme de l'équation geodésique $\lambda = 1$.

5) Rappelez les expressions de g_{00}, g_{03} et g_{33}, et écrivez-les pour $\theta = \pi/2$.

Ecrivez alors explicitement l'équation geodésique $\lambda = 1$ et l'équation résultant de l'expression du ds^2.

6) Montrez que le système ainsi obtenu peut également s'écrire (on note $\dot{X} \equiv dX/d\tau$)

$$\begin{aligned} \dot{t}^2 - \left(3r^2 + a^2\right)\dot{\varphi}^2 &= 1 \\ m\left(\dot{t} - a\dot{\varphi}\right)^2 &= r^3\dot{\varphi}^2. \end{aligned}$$

Vérifiez que si $a = 0$, alors $r > 3m$, et expliquez-moi pourquoi ça vous rassure !

7) Montrez que le système n'a des solutions que si

$$F_\epsilon(X) > 0 \quad \text{avec} \quad F_\epsilon(X) = X^3 - 3X + 2\epsilon A$$

où

$$X = \sqrt{r/m}\ , \quad A = a/m\ , \quad \text{et } \epsilon = \pm 1.$$

8) Calculer X_H au niveau de l'horizon externe (r_H^+).

Montrer alors que $F_\epsilon(X_H) < 0$.

9) En déduire que, à l'extérieur de l'horizon, des orbites circulaires libres ne peuvent exiter que si

$$\begin{aligned} r &> r_1 \quad \text{pour} \quad \epsilon = +1 \\ r &> r_2 \quad \text{pour} \quad \epsilon = -1 \end{aligned}$$

et donner la relation d'inégalité entre r_1 et r_2. Pour cela, IL N'EST PAS NECESSAIRE (et on ne demande pas) DE CALCULER EXPLICITEMENT r_1 et r_2.

Interpréter cette relation d'inégalité.