

Université de Nice Sophia-Antipolis  
 Master OMEGA-parcours Astrophysique  
 2<sup>ème</sup> année.

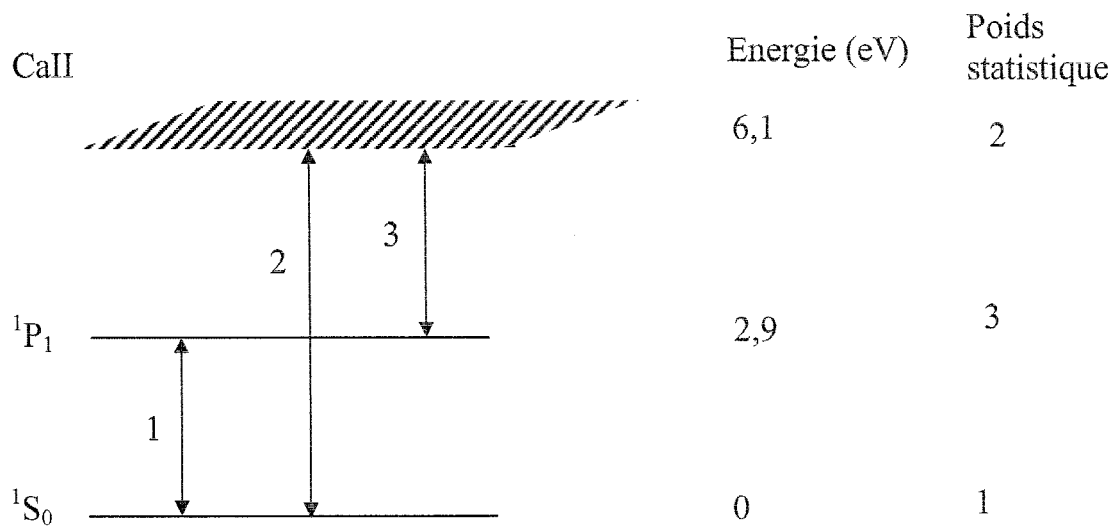
**Examen « Transfert de rayonnement et atmosphères stellaires »**

**Durée 2 heures.**

M. Faurobert

Novembre 2008.

On représente la structure de l'atome de calcium neutre par 2 niveaux d'énergie liés plus un continu d'ionisation (état fondamental de Ca<sup>+</sup>). Ces niveaux sont représentés sur le schéma ci-dessous, où on donne pour chaque niveau : l'énergie en eV, et le poids statistique du multiplet correspondant.



On donne  $h = 6.626 \cdot 10^{-27}$  erg.s,  $k = 1.381 \cdot 10^{-16}$  erg /K et  $c = 2.998 \cdot 10^{10}$  cm/s et  $1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-12}$  erg

L'article de Ayres & Testerman joint sera utile en particulier pour ses tables de données concernant les taux de transitions radiatives et collisionnelles entre ces niveaux. Vous remarquerez que dans cet article l'atome de calcium neutre est représenté par 4 niveaux d'énergie liés plus le continu d'ionisation. Les niveaux liés qui sont pris en compte dans le présent examen sont les niveaux 1 et 4 de Ayres et Testerman.

Les coefficients  $CE_{jk}$  pour l'ionisation collisionnelle, les section efficaces de photoionisation au seuil ( $\alpha_{jk}$ ) et la température du rayonnement photo-ionisant (Trad) sont donnés Table II-A. La Table II-B donne les coefficients  $CE_{lu}$  pour les taux d'excitations collisionnelles du niveau l vers le niveau u. La Table III-C donne la force d'oscillateur pour la raie spectrale entre le niveau 1 et 2.

Question préliminaire : Dans l'article les énergies sont exprimées en  $\text{cm}^{-1}$ .  
 Comment peut-on relier l'énergie d'un niveau atomique exprimée en eV à la  
 valeur exprimée en  $\text{cm}^{-1}$  ?

Toutes les valeurs numériques des coefficients à calculer seront présentées sous  
 forme d'un tableau . On considérera toujours les 2 points suivants de la  
 photosphère solaire :

$$z = 150 \text{ km}, T = 5180\text{K}, n_e = 6,5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}, n_H = 4,9 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$$

$$z = 450 \text{ km}, T = 4220\text{K}, n_e = 4,5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-3}, n_H = 4,0 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$$

- 1) Montrez que dans la photosphère solaire le calcium neutre est une espèce minoritaire par rapport au calcium ionisé une fois. On considérera les 2 points de la photosphère.
- 2) Le but du problème est d'estimer la densité de population du niveau fondamental du calcium neutre dans la photosphère solaire, en tenant compte des effets hors-ETL.  
 Ecrire l'équation d'équilibre statistique pour le niveau fondamental du CaI

### I- Transitions avec le continu d'ionisation

- 3) a) Calculez  $R_{13}$  (taux de photo-ionisation) en utilisant l'expression donnée dans la légende de la Table IIA.

On rappelle que  $F(x_0) = \int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{x} \frac{dx}{\exp(x)-1} \approx \frac{\exp(-x_0)}{x_0}$  si  $x_0 \gg 1$

- b) Le taux de recombinaison radiative  $R_{31}$  s'écrit

$$R_{31} = R_{13} \left( \frac{n_1}{n_3} \right)^* F\left(\frac{E_{ion}}{kT}\right) / F\left(\frac{E_{ion}}{kT_{rad}}\right), \text{ où } \left( \frac{n_1}{n_3} \right)^* \text{ représente le rapport des}$$

populations à l'ETL

Calculez  $R_{31}$  aux deux points de la photosphère  $z=150 \text{ km}$  et  $z=450 \text{ km}$ .

- 4) Calculez  $C_{13}$  (taux d'ionisation collisionnelle) pour ces deux même points de la photosphère, en utilisant l'expression donnée dans la légende de la table IIA. Vérifiez que  $C_{13} \ll R_{13}$ .

- 5) Montrez que le taux de recombinaisons collisionnelles  $C_{31} = \left( \frac{n_1}{n_3} \right)^* C_{13}$ .

Comparez  $C_{31}$  et  $R_{31}$

## II- Transitions entre niveaux liés

- 6) En utilisant la valeur de la force d'oscillateur donnée dans l'article, calculez le coefficient d'Einstein pour l'émission spontanée  $A_{21}$ . En déduire la valeur du coefficient d'Einstein pour l'absorption  $B_{12}$ .
- 7) Rappelez pourquoi on peut négliger l'émission induite devant l'émission spontanée dans cette raie.
- 8) Calculez les taux de transitions collisionnelles entre le niveau 2 et le niveau 1 pour les deux mêmes points de la photosphère. Que remarquez vous ?
- 9) En admettant que dans la photosphère la raie  $1 \rightarrow 2$  est en bilan détaillé c'est à dire que  $n_1 R_{12} = n_2 R_{21}$ , où les taux  $R_{12}$  et  $R_{21}$  sont les taux de transitions radiatives, redonnez l'équation d'équilibre statistique du niveau 1, en ne gardant que les termes dominants.  
Quel est le processus dominant pour le peuplement du niveau 1 ? Par quel processus se dépeuple t'il majoritairement ? En déduire l'expression de  $n_1$  en fonction de  $n_3$ .
- 10) En utilisant le fait que  $n_3$  est pratiquement égal au nombre total d'atomes de calcium par unité de volume (presque tous les atomes de calcium sont dans l'état ionisé une fois), calculez  $n_1$  pour les deux points de la photosphère (utiliser la valeur de l'abondance du Calcium donnée dans le résumé de l'article joint). Comparez les valeurs trouvées à celles déduites de la loi de Saha à l'ETL.

# THE CENTER-TO-LIMB BEHAVIOR OF Ca I $\lambda 6573$ AND [Ca II] $\lambda 7324$

T. R. AYRES\*

*Joint Institute for Laboratory Astrophysics, University of Colorado and National Bureau of Standards,  
Boulder, Colo. 80309, U.S.A.*

and

L. TESTERMAN

*Kitt Peak National Observatory\*\*, Tucson, Ariz. 85726, U.S.A.*

(Received 21 March; in revised form 15 June, 1978)

**Abstract.** Center-to-limb measurements of the Ca I  $\lambda 6573$  intercombination line and the Ca II  $\lambda 7324$  forbidden line are compared with synthetic profiles based on a simple representation of the non-LTE Ca-Ca<sup>+</sup> ionization equilibrium. The effects of photoionizations from low lying excited states of neutral calcium are found to reduce the sensitivity of the  $\lambda 6573$  center-to-limb behavior as a thermal structure diagnostic. The synthetic center-to-limb behavior is also sensitive to uncertainties in the nonthermal broadening. Nevertheless, the measured center-to-limb behavior of  $\lambda 6573$  favors a 'cool' photospheric model similar to the Vernazza, Avrett, and Loeser model *M* over hotter models based on the Ca II K wings. The non-LTE calcium abundance obtained from the disk center equivalent widths of  $\lambda 6573$  and  $\lambda 7324$  using the best fit model is  $A_{Ca} \cong 2.1 \pm 0.2 \times 10^{-6}$  (by number relative to hydrogen). Applications of these lines as diagnostics of the Ca-Ca<sup>+</sup> ionization equilibrium in other stars are briefly discussed.

## 1. Introduction

The  $\lambda 6573$  intercombination line of Ca I ( $4s^2 1S_0-4s 4p^3 P_1$ ) and the forbidden  $\lambda 7324$  electric quadrupole transition of Ca II ( $4s^2 S_{1/2}-3d^2 D_{3/2}$ ) have been used in a variety of recent studies of the solar photosphere and the atmospheres of several late-type stars. Schorn *et al.* (1975) have estimated the solar calcium abundance based on a flux-average equivalent width of the [Ca II]  $\lambda 7324$  line, which they separated from an overlapping terrestrial water vapor blend using the Doppler shifted solar reflection spectrum of Venus. Ayres (1977a, b) has applied LTE analyses of the Ca I and [Ca II] line shapes, obtained from disk-center tracings in the KPNO solar atlas (Brault and Testerman, 1972), to study the model dependence of calcium abundance estimates, and to determine the radial component of nonthermal broadening in the deeper layers of the solar photosphere. Ramsey (1977) has measured  $\lambda 7324/\lambda 6573$  line ratios in five late-type giant stars to investigate possible departures from LTE ionization equilibrium.

As Ramsey has shown, the  $\lambda 6573$  and  $\lambda 7324$  features are useful probes of the Ca-Ca<sup>+</sup> ionization balance for two reasons: (1) each transition arises from the most populous level of the particular ionization stage (i.e. the ground states); and (2) the

\* Visiting Astronomer, Kitt Peak National Observatory.

\*\* Operated by the Association of Universities for Research in Astronomy, Inc. under contract with the National Science Foundation.

$V_A$  (mÅ)

- 6.9 ± 0.3
- 9.1 ± 1
- 4.6 ± 0.3
- 3.0 ± 0.9
- 1.4 ± 0.2
- 5 ± 2

ing gaussians to the [Ca II]-  
 at  $\mu = 0.20$  are much more  
 he greater distortion of the  
 nb tracings.

be close to LTE (i.e.  $S_i = B$ )  
 levels. However, departures  
 important in the Ca-Ca<sup>+</sup>  
 as low-lying excited states  
 et regions of the spectrum  
 977). Furthermore, neutral  
 ures and densities.  
 Ca<sup>+</sup> ionization equilibrium  
 levels plus the continuum  
 S<sub>0</sub>) and the upper levels of  
 573 intercombination line  
 explicitly in the transfer  
 v-lying metastable <sup>1</sup>D and  
 by collisions to each other  
 excitation and ionization of  
 Zachary and E. H. Avrett.  
 l rates, using the radiation  
 lent photoionization rates,  
 kindly provided by E. H.  
 ng the detailed frequency  
 o depth-dependent solar  
 ospheres code (Vernazza

*et al.*, 1973). The relevant atomic data for the neutral calcium model are summarized in Table II.

Although our atomic model is relatively simple, it does include what we feel are the important physical processes which control the Ca-Ca<sup>+</sup> ionization equilibrium in the solar photosphere. In fact, Ca I ground state departure coefficients based on the four-level Ca atom compare favorably with a much more elaborate eight-level plus continuum simulation of neutral calcium (Avrett, 1977a). In addition, the eight-level calculations suggested that autoionization played only a minor role in the ionization equilibrium under solar conditions, so we omitted autoionization transitions from our simplified atomic model.

TABLE IIA  
 Model neutral calcium atom

<i>l</i>	<i>g<sub>l</sub></i>	<i>E<sub>l</sub></i> (cm <sup>-1</sup> )	<i>CE<sub>lu</sub></i> <sup>a</sup>	$\alpha_{lx}$ (cm <sup>2</sup> )	<i>T<sub>rad</sub></i> (K)
<i>E<sub>ion</sub></i> = 19304.8 cm <sup>-1</sup>					
Ca					
1 ( <sup>1</sup> S <sub>0</sub> )	1	0	8(-8) <sup>a</sup>	1.3(-18) <sup>c</sup>	4800
2 ( <sup>3</sup> P <sup>o</sup> <sub>1</sub> )	3	8533	9(-8) <sup>a</sup>	6(-18) <sup>d</sup>	4550
3 ( <sup>1</sup> D - <sup>3</sup> D)	10	26130	1.3(-7) <sup>b</sup>	5(-18) <sup>d</sup>	4550
4 ( <sup>3</sup> P <sup>o</sup> <sub>2</sub> )	3	15052	1.6(-7) <sup>b</sup>	8(-18) <sup>d</sup>	4775
Ca <sup>+</sup>					
5 ( <sup>2</sup> S)	2	0	—	—	—

\*  $C_{lu} = n_e CE_{lu}(T/5000)^{0.5} e^{-(E_{ion}-E_l)/kT}$ .  
<sup>†</sup>  $R_{lx} \approx 7.54 \times 10^{11} (E_{ion} - E_l)^2 \alpha_{lx} F[1.4388(E_{ion} - E_l)/T_{rad}]$ , where  $F(x)$  is given by Auer *et al.* (1972; p. 19).  
<sup>a</sup> Okuno (1971).  
<sup>b</sup> House (1964).  
<sup>c</sup> Carter *et al.* (1971).  
<sup>d</sup> Kelm and Schlüter (1962).  
<sup>e</sup> Travis and Matsushima (1968).

TABLE IIB  
 Collision rate coefficients

<i>l</i> - <i>u</i>	<i>CE<sub>lu</sub></i> <sup>a</sup>
1-2	1 (-8) <sup>a</sup>
1-3	1 (-9) <sup>a</sup>
1-4	1.07(-7) <sup>b</sup>
2-3	5 (-9) <sup>a</sup>
2-4	1 (-9) <sup>a</sup>
3-4	1 (-8) <sup>a</sup>

\*  $C_{lu} = n_e CE_{lu}(T/5000)^{0.5} e^{-n_{lu}/kT}$ .  
<sup>a</sup> Based on approximation formulae (van Regemorter, 1962).  
<sup>b</sup> Crandall *et al.* (1974).

TABLE IIC  
Line transitions\*

	$\lambda(\text{\AA})$	$l$	$u$	$f_{lu}$	$\gamma_{osc}$	$\gamma_{rad}$
Ca I	4227	1	4	1.75(0)	2.9(-8)	2.2(+8)
	6573	1	2	5 (-5)	1.7(-8)*	2.9(+3)
[Ca II]	7234	—	—	1.6(-8)	1 (-8)	1 (0)

\* See Ayres (1977a), references therein.

\* Scaled from Smith (1967) helium result.

### 3.2. SPECTRUM SYNTHESIS

The combined statistical equilibrium and radiative transfer equations for the model Ca atom were solved using a modification of the complete linearization method of Auer *et al.* (1972). The  $\lambda$  4227 resonance line was treated with a partial redistribution formalism (e.g. Milkey, 1976), while the  $\lambda$  6573 intercombination line was assumed to be formed by complete redistribution.  $R^{11}$  redistribution weights for  $\lambda$  4227 were computed using Kneer's (1975) approximation.

The derived departure coefficients for neutral calcium were introduced into a separate spectrum synthesis code which incorporated more detailed opacities (including the H $\alpha$  wing) than the generalized non-LTE code and which allowed modeling of the center-to-limb behavior of  $\lambda$  6573 taking into account variations in microturbulence models and the calcium abundance. Variations in the latter quantities should produce only second-order effects on the departure coefficients. The spectrum synthesis code incorporates Auer's (1976) Hermitian differencing scheme. A ten-point-per-decade optical depth spacing was used.

### 3.3. MODEL ATMOSPHERES

Two representative models of the solar photosphere (see e.g. Avrett, 1977b) are illustrated in Figure 2. The thermal structures of these models differ primarily in the upper photosphere layers above  $\tau_{5000} \cong 10^{-1.5}$ . The  $T(\tau)$  relation below  $\tau_{5000} \cong 10^{-1.2}$  corresponds to the Vernazza *et al.* (1976) model M scaled slightly in temperature (see Ayres, 1978a). The deep photosphere of the modified VAL model M accurately reproduces the center-to-limb behavior and absolute intensity of the background continuum at  $\lambda$  6573 and  $\lambda$  7324.

The upper photosphere of Model 1 represents the thermal structure proposed by Linsky and Ayres (1978) to fit calibrated integrated sunlight profiles of the cores and inner wings of the Ca II K  $\lambda$  3934 resonance line (see also Ayres, 1977a). Model 1 has a minimum temperature of 4400 K near  $\tau_{5000} = 10^{-4}$  and, more important, generally hotter upper photosphere temperatures than the VAL model M. Model 2 represents the upper photosphere of the VAL Model M, with a slightly hotter minimum temperature ( $T_{\min} = 4200$  K). Both models include chromospheric temperature rises consistent with that of the VAL Model M.

Fi

h,  
el  
o:  
0  
d  
P

4

F  
P  
a  
n  
s  
b  
It