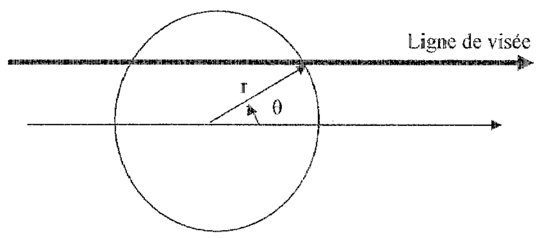
Examen « Transfert de rayonnement et atmosphères stellaires »
Master OMEGA- Astrophysique

Janvier 2006

1) On considère un milieu où la densité des particules est notée n (nombre de particules par unité de volume), ces particules peuvent absorber les photons avec une section efficace d'absorption notée σ.
   a) Quelle est l'expression de l'opacité ? Démontrer l'expression du libre parcours moyen des photons.
   b) Dire pourquoi le libre parcours moyen peut dépendre de la longueur d'onde. Donner un exemple où c'est le cas et un autre exemple où ce n'est pas le cas.
   c) Dans le cas où le libre parcours moyen ne dépend pas de la longueur d'onde, donner l'équation de transfert du rayonnement en géométrie quelconque (sans la démontrer). On utilisera les notations standards. Rappeler sous quelle condition on peut négliger les variations temporelles du champ de rayonnement. On supposera ces conditions vérifiées dans la suite.
2) On considère maintenant que les propriétés physiques du milieu en tout point ***r*** ne dépendent que de la distance de ce point par rapport à un centre (milieu à symétrie sphérique, voir figure). Et on se place dans le cas où le libre parcours moyen est indépendant de la longueur d'onde. On considère la propagation du rayonnement sur une ligne de visée parallèle à l'axe des coordonnées.



Montrer que l'équation de transfert le long de cette ligne de visée s'écrit

$$\mu\frac{\partial I_\nu}{\partial r}+\frac{(1-\mu^2)}{r}\frac{\partial I_\nu}{\partial\mu}=-kI_\nu+j_\nu,\text{ où } \mu=\cos(\theta)$$

(On écrira le vecteur unitaire sur la ligne de visée en fonction des vecteurs unitaires du système des coordonnées sphériques). En déduire que dans un milieu à symétrie sphérique, le champ de rayonnement au point r dépend de r et cos(θ).

3) Rappeler la définition du flux du rayonnement. Comment s'exprime t'il dans un milieu à symétrie sphérique ? Montrer que seule la composante radiale est non nulle et qu'elle vaut

$$F_\nu=4\pi\int_0^\infty d\nu H_\nu,\text{ avec } H_\nu=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}I_\nu(r,\mu)\mu d\mu$$ (H_ν est le premier moment du champ de rayonnement)

4) Quelle est l'équation de transfert pour le flux du rayonnement dans un milieu de géométrie quelconque ? Dans un milieu à symétrie sphérique ?
5) On suppose maintenant que le milieu à symétrie sphérique est en équilibre radiatif. Donner dans ce cas l'équation pour le flux du rayonnement. En déduire l'expression suivante

$\cancel{H_\nu=\frac{R^2}{r^2}H_{\nu0}}$, où R est le rayon extérieur de l'objet et $H\nu_0$ la valeur de $H\nu$ en $r=R$.

$$\int H_\nu d\nu=\frac{R^2}{r^2}\int H_{\nu 0} d\nu$$

6) On définit les moments d'ordre 0 et 2 du rayonnement

$$J_\nu=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}I_\nu d\mu \text{ et } K_\nu=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mu^2 I_\nu d\mu$$

A partir de l'équation de transfert pour $I\nu$ (première question), montrer que

$$\frac{\partial K_\nu}{\partial r}+\frac{1}{r}(3K_\nu-J_\nu)=-kH_\nu$$

****

Dans le cas où l'opacité ne dépend pas de la longueur d'onde (cas gris) nous introduisons les moments du champ de rayonnement intégrés sur les fréquences :

$$J=\int_{-\infty}^{+\infty}J_\nu d\nu,\ H=\int_{-\infty}^{+\infty}H_\nu d\nu \text{ et } K=\int_{-\infty}^{+\infty}K_\nu d\nu$$

Nous allons maintenant chercher les expressions de ces moments pour un milieu gris à symétrie sphérique en équilibre radiatif. L'équation de transfert et l'équation d'équilibre radiatif s'écrivent (voir questions précédentes)

$$\frac{\partial r^2 H}{\partial r}=0 \quad\text{et}\quad \frac{\partial K}{\partial r}+\frac{1}{r}(3K-J)=-kH$$

Pour « fermer » ce système, on introduit la relation suivante entre le moment d'ordre 2 et le moment d'ordre 0 :
$K=fJ$, f est appelé le facteur d'Eddington (encore lui).

7)Etude aux grandes profondeurs optiques.

On définit la profondeur optique « radiale » par $\tau(r)=\int_r^R k(r')dr'$.

Quand $\tau\to\infty$, $f\to\frac{1}{3}$. Donner dans ce régime l'expression de J.

En supposant que le milieu est à l'équilibre thermodynamique local, en déduire l'expression de la température.

8) Etude aux faibles profondeurs optiques.

Quand $\tau\to 0$, $f\to 1$, en déduire l'expression de J aux petites profondeurs, en fonction de H_0, r et τ.

9) Raccordement entre les deux régimes.

Supposons maintenant que l'opacité du milieu varie comme une loi de puissance en fonction de r : $k(r) = C_0 r^{-n}$

On a de bonnes raisons pour utiliser ce type de loi de variation. Est ce que vous pouvez en trouver ? (question bonus)

Montrer qu'alors l'expression de J aux grandes profondeurs devient

$$\cancel{J(\tau) = \frac{3(n-1)}{(n+1)} H_0 \frac{\tau}{r}} \qquad 3H_0 \frac{\tau}{n^2} R^2$$

Donner J sous forme d'une expression analytique simple permettant de raccorder les deux régimes.

10) En supposant que le milieu est à l'ETL partout en déduire la loi de variation de la température en fonction de la profondeur optique radiale. Discuter les différences avec le cas d'un milieu gris à géométrie plane vu en cours.