Université Nice SOPHIA ANTIPOLIS

master Omega
Optique-dynaMiquE-imaGes-Astrophysique

Thermodynamique Statistique Hors Équilibre
1 février 2008

Transport dans un liquide de Fermi : modèle de Landau

Ce problème propose de dépasser le modèle du gaz parfait pour un gaz de fermions neutres ; on prendra comme exemple l'Helium^3 liquide à très basse température, qui constitue un exemple de « liquide de Fermi » isotrope – cette propriété n'est plus vraie pour un gaz d'électrons dans un métal. La relation de dispersion en tenant compte des interactions est toujours notée $\varepsilon(p)$ mais à la différence du cas libre $\varepsilon(p) \neq p^2/2m$. À cause des interactions la relation de dispersion est généralement plus compliquée : $\varepsilon(p)$ représente la variation d'énergie qui accompagne l'ajout d'une particule de moment $\vec{p}$ au système à l'équilibre. Nous ne prendrons pas en compte dans ce problème les interactions avec le spin des particules, mais ils peuvent être très facilement introduits, pour traiter par exemple le paramagnétisme de Pauli.

A. Modèle de Landau

Le modèle construit par Landau repose sur l'existence à température nulle d'une surface de Fermi qui reste bien définie et abrupte, malgré les interactions ; la distribution d'équilibre du liquide de Fermi est donnée par

$$f_0[\varepsilon(p)] = \theta(\mu - \varepsilon(p)) \tag{1}$$

$$\frac{\delta f_0}{\delta \varepsilon(p)} = -\delta(\varepsilon(p) - \mu) \tag{2}$$

Cette distribution décrit une situation où tous les états à l'intérieur de la sphère de Fermi sont occupés : on parle alors de la « mer de Fermi ». L'impulsion de Fermi p_{F} est toujours donné par (pour un fermion de spin 1/2)

$$p_{\mathrm{F}} = \left(\frac{3h^3}{8\pi}\frac{N}{V}\right)^{1/3} = \left(\frac{3h^3}{8\pi}\right)^{1/3} n^{1/3} \tag{3}$$

mais $\mu \neq \varepsilon_{\mathrm{F}} = p_{\mathrm{F}}^2/2m$.

1. On ajoute (ou enlève) une particule d'énergie ε dans (à) la mer de Fermi : en raison de sa relation de dispersion particulière, on appellera cet objet une *quasiparticule*. Justifiez qualitativement que

$$\varepsilon(p)|_{p=p_{\mathrm{F}}} = \mu \tag{4}$$

2. On suppose maintenant que l'on crée ou détruit plusieurs quasiparticules dans la mer de Fermi. Le nombre total de particules n'est pas nécessairement affecté par cette opération ; en revanche, la distribution des quasiparticules n'est plus la distribution d'équilibre (1) :

$$\delta f(\vec{p}) = f(\vec{p}) - f_0(\varepsilon(p)) \tag{5}$$

La quantité $\delta f(\vec{p})$ est une mesure de la déviation à l'équilibre : elle traduit le « degré d'excitation » au voisinage de la surface de Fermi. Le modèle de Landau s'appuyant sur un développement en puissance de δf, il ne sera valide qu'à basse température où δf n'est non nul que dans un intervalle 2ξ au voisinage de la surface de Fermi (voir figure 1) :

$$|\varepsilon(p) - \mu| \lesssim \xi \ll \mu$$

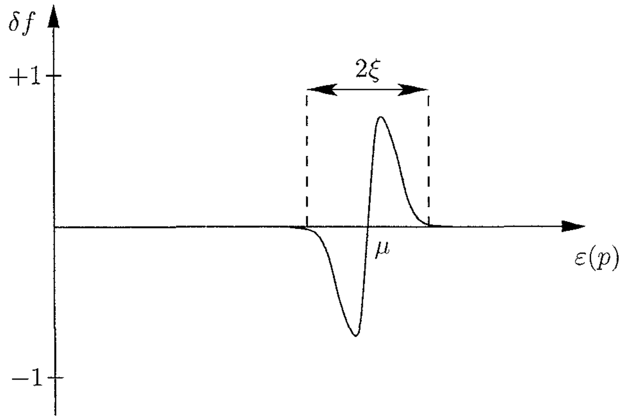

FIG. 1 – *Perturbation de la distribution d'équilibre (1) : $\delta f(\vec{p})$ est non nul uniquement au voisinage de la surface de Fermi. La partie négative correspond à des trous dans la mer de Fermi.*

Landau propose la forme suivante pour l'énergie d'une quasiparticule *dans l'environnement d'autres quasiparticules* :

$$\tilde{\varepsilon}(\vec{p}) = \varepsilon(p) + \frac{2V}{h^3}\int \mathrm{d}^3p'\,\lambda(\vec{p},\vec{p}\,')\delta f(\vec{p}\,') \tag{6}$$

Notons que si l'on ajoute une seule quasiparticule, alors $\tilde{\varepsilon}(\vec{p}) = \varepsilon(p)$. Contrairement à la relation de dispersion idéale, $\tilde{\varepsilon}(\vec{p})$ n'est généralement pas isotrope, car $\delta f(\vec{p})$ ne l'est pas. La fonction $\lambda(\vec{p},\vec{p}\,')$ est définie au voisinage de la surface de Fermi ($p = p' = p_{\mathrm{F}}$) et se développe sur la base des polynômes de Legendre $P_\ell(x)$ (leurs propriétés sont rappelées en dernière page)

$$\lambda(\vec{p},\vec{p}\,') = \sum_{\ell=0}^{\infty}\alpha_\ell P_\ell(\cos\theta) \tag{7}$$

où θ est l'angle entre $\vec{p}$ et $\vec{p}\,'$ et les α_ℓ des coefficients réels. Montrez que $\lambda(\vec{p},\vec{p}\,')$ est d'ordre a^3/V, où a est la portée du potentiel d'interaction. Montrez que, tout comme $|\varepsilon(p) - \mu|$, le deuxième terme dans (6) est d'ordre ξ. Il ne peut donc pas être négligé – en revanche, les termes d'ordre supérieur dans un développement en puissances de δf sont négligeables.

Montrez que si δf est isotrope alors

$$\tilde{\varepsilon}(p) = \varepsilon(p) + \alpha_0\delta N$$

où δN est le nombre total de quasiparticules.

3. Au lieu de $\delta f(\vec{p})$, il est commode de définir $\delta\bar{f}(\vec{p})$ par

$$\delta\bar{f}(\vec{p}) = f(\vec{p}) - f_0(\tilde{\varepsilon}(\vec{p})) \tag{8}$$

Montrez que

$$\delta\bar{f}(\vec{p}) = \delta f(\vec{p}) + \delta(\varepsilon(p) - \mu)\frac{2V}{h^3}\int \mathrm{d}^3p'\,\lambda(\vec{p},\vec{p}\,')\delta f(\vec{p}\,') \tag{9}$$

4. Nous allons nous placer à température non nulle mais petite ($kT \ll \mu$) où le liquide de Fermi est fortement dégénéré. Soit $f_0(\vec{p},T)$ la distribution d'équilibre des quasiparticules

$$f_0(\vec{p},T) = \frac{1}{1+\exp\left[(\tilde{\varepsilon}-\mu)/kT\right]} \tag{10}$$

On définit « l'excitation thermique » $\delta f(\vec{p},T)$ par

$$\delta f(\vec{p},T) = f_0(\vec{p},T) - f_0[\varepsilon(p)] \tag{11}$$

En utilisant le développement de Sommerfeld

$$f(\varepsilon) \simeq \theta(\mu - \varepsilon) - \frac{\pi^2}{6}(kT)^2\,\delta'(\varepsilon - \mu) \tag{12}$$

montrez que

$$\int \mathrm{d}^3p\,\delta f(\vec{p}, T) \propto (kT)^2 \rho'(\mu)$$

où $\rho(\varepsilon)$ est la densité d'états. Déduisez de ce résultat

$$\int \mathrm{d}p\, p^2 \delta f(\vec{p}, T) \propto T^2$$

quelle que soit la direction $\vec{p}$, et justifiez que l'on puisse poser $\tilde{\varepsilon}(\vec{p}) = \varepsilon(p)$ à l'ordre dominant en T. La densité d'états reste donc qualitativement identique à celle du cas libre :

$$\rho(\varepsilon_{\mathrm{F}}) = \frac{8\pi V}{h^3} p_{\mathrm{F}}^2 \left.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{p=p_{\mathrm{F}}} = \frac{V}{\pi^2\hbar^3}\, m p_{\mathrm{F}} \rightarrow \rho(\mu) = \frac{8\pi V}{h^3} p_{\mathrm{F}}^2 \left.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{p=p_{\mathrm{F}}} = \frac{V}{\pi^2\hbar^3}\, m^* p_{\mathrm{F}} \tag{13}$$

mais le remplacement de $\tilde{\varepsilon}$ par ε requiert l'introduction d'un paramètre effectif, ici la masse effective m^* définie par

$$\left.\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}p}\right|_{p=p_{\mathrm{F}}} = \frac{p_{\mathrm{F}}}{m^*} \tag{14}$$

Dans le reste du problème, nous nous plaçons à nouveau dans la situation $T = 0$

5. Calculez $\delta \bar{f}(\vec{p})$ quand le potentiel chimique varie de μ à $\mu + \mathrm{d}\mu$ en raison de l'ajout de quasiparticules. Tenant compte de l'isotropie de $\delta f(\vec{p})$, montrez que

$$\frac{\partial N}{\partial \mu} = \frac{\rho(\mu)}{1 + \Lambda_0}$$

où $\Lambda_0 = \alpha_0 \rho(\mu)$ est un paramètre sans dimension et indépendant de V.

6. On rappelle les expressions de la compressibilité isotherme

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_T = \frac{1}{n^2}\left.\frac{\partial n}{\partial \mu}\right|_T$$

Pour un gaz parfait de Fermi, la compressibilité isotherme à température nulle $\kappa = \kappa_T(T = 0)$ est donnée par

$$\kappa = \frac{1}{n^2 V}\,\rho(\varepsilon_{\mathrm{F}}) = \frac{1}{n^2}\,\frac{m p_{\mathrm{F}}}{\pi^2\hbar^3} \tag{15}$$

Montrez que l'expression (15) de la compressibilité à $T = 0$ devient pour le liquide de Fermi

$$\kappa = \frac{1}{n^2}\,\frac{m^* p_{\mathrm{F}}}{\pi^2\hbar^3(1 + \Lambda_0)}$$

Pour l'Helium^3 à la pression atmosphérique, $m^*/m \simeq 3$ et $\Lambda_0 \simeq 10$. La compressibilité de l'Helium^3 est elle sur ou sous-estimée lorsqu'elle est calculée avec un modèle de gaz parfait ?

B. Équation de Boltzmann et courants

Dans une situation d'équilibre local, l'énergie des quasiparticule est une fonction de $\vec{p}$ et de $\vec{r}$: $\tilde{\varepsilon}(\vec{p},\vec{r})$. Afin de décrire les propriétés de transport d'un liquide de Fermi, Landau suppose les quasiparticules indépendantes et décrites par un hamiltonien individuel classique $\tilde{\varepsilon}$. Une théorie cinétique du gaz de quasiparticules est alors possible. Compte tenu de

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \vec{\nabla}_{\vec{p}}\,\tilde{\varepsilon} \qquad \dot{\vec{p}} = \vec{F} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}}\,\tilde{\varepsilon}$$

l'équation de Boltzmann en l'absence de collisions entre quasiparticules s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{\nabla}_{\vec{p}}\,\tilde{\varepsilon})\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}} f - (\vec{\nabla}_{\vec{r}}\,\tilde{\varepsilon})\cdot\vec{\nabla}_{\vec{p}} f = 0$$

où $f(\vec{r},\vec{p},t)$ représente la fonction de distribution des quasiparticules.

1. La description faite dans la partie A reste localement pertinente ; on pose ainsi

$$f(\vec{r},\vec{p},t) = f_0[\varepsilon(p)] + \delta f(\vec{r},\vec{p},t)$$

où f_0 est la distribution d'équilibre (1). La densité locale est donnée par

$$n(\vec{r},t) = \frac{2}{h^3}\int \mathrm{d}^3p\, f(\vec{r},\vec{p},t) \tag{16}$$

La relation de dispersion des quasiparticules s'écrit localement comme

$$\tilde{\varepsilon}(\vec{p},\vec{r},t) = \varepsilon(p) + \frac{2V}{h^3}\int \mathrm{d}^3p'\,\lambda(\vec{p},\vec{p}\,')\delta f(\vec{r},\vec{p},t) \tag{17}$$

Montrez que $\vec{\nabla}_{\vec{r}}\,\tilde{\varepsilon}$ est du premier ordre en δf. Vérifiez que

$$\vec{\nabla}_{\vec{p}} f_0 = -\frac{\vec{p}}{m^*}\delta(\varepsilon(p)-\mu) = -\vec{v}\delta(\varepsilon(p)-\mu)$$

où $\vec{v}$ est la vitesse de groupe. Montrez qu'à l'ordre dominant en δf, l'équation de Boltzmann avec collisions prend la forme suivante

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}}\delta\bar{f} = C[\delta f] \tag{18}$$

Vous ne chercherez pas à expliciter le terme de collisions $C[\delta f]$!

2. La surdensité de (quasi)particules est donnée par

$$\delta n(\vec{r},t) = \frac{2}{h^3}\int \mathrm{d}^3p\,\delta f(\vec{r},\vec{p},t)$$

Le courant $\vec{\jmath}$ associé doit vérifier l'équation de continuité

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + \vec{\nabla}_{\vec{r}}\cdot\vec{\jmath} = 0 \tag{19}$$

En utilisant l'équation de Boltzmann (18) et la propriété du terme de collisions

$$\int \mathrm{d}^3p\, C[\delta f] = 0$$

montrez que le courant

$$\vec{\jmath} = \frac{2}{h^3}\int \mathrm{d}^3p\,\vec{v}\delta\bar{f}$$

est solution de (19). Pourquoi l'autre forme *a priori* possible de ce courant

$$\vec{\jmath} = \frac{2}{h^3}\int \mathrm{d}^3p\,\vec{v}\delta f$$

n'est-elle pas correcte ?

3. Il peut être parfois utile d'avoir une expression du courant de quasiparticules qui fasse intervenir δf. Montrez que $\vec{\jmath}$ peut se mettre sous la forme

$$\vec{\jmath} = \frac{2}{h^3}\int \mathrm{d}^3p\, \vec{\jmath}_{\vec{p}}\, \delta f$$

avec

$$\vec{\jmath}_{\vec{p}} = \vec{v} + \frac{2V}{h^3}\int \mathrm{d}^3p'\, \frac{\vec{p}'}{m}\lambda(\vec{p},\vec{p}')\delta(\varepsilon(p')-\mu) = \vec{v}\left(1+\frac{1}{3}\alpha_1\rho(\mu)\right)$$

qu'on identifiera au courant associé à *une* quasiparticule.

Pour un système invariant par translation, $\vec{\jmath}_{\vec{p}} = \vec{p}/m$. Établissez dans ce cas la relation entre la masse des particules et des quasiparticules

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m^*}\left(1+\frac{1}{3}\Lambda_1\right) \qquad \Lambda_1 = \alpha_1\rho(\mu)$$

Polynômes de Legendre

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}(\cos\theta)\, P_\ell(\cos\theta)P_{\ell'}(\cos\theta) = \frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'}$$

$$P_0(\cos\theta) = 1 \qquad P_1(\cos\theta) = \cos\theta$$