EXAMEN

(durée : 3 heures)

Relations utiles

$\int_0^\infty x^2 \ln(1-e^{-x})\mathrm{d}x = -\pi^4/45, \qquad F = -\ln Q/\beta, \qquad S = -\left(\partial F/\partial T\right)_V$

Densité d'états : $D(k) = \mathcal{V}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^d$ avec d la dimension et $\mathcal{V}$ la dégénérescence.

$\vec{p} = \hbar\vec{k}, \quad 1\,\mathrm{Joule} = 6.24\times10^{12}\mathrm{MeV},\ m_p = m_n = 1.67\times10^{-27}\mathrm{kg}$

$h = 6.63\times10^{-34}\mathrm{Joule.sec}, \qquad \lambda = h/\sqrt{2\pi mkT}$

$\langle n_\ell\rangle_{FD} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_\ell-\mu)}+1}, \quad \langle n_\ell\rangle_{BE} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_\ell-\mu)}-1}$

$\int_0^\infty \mathrm{d}x\sqrt{x}\,e^{-x} = \frac{\sqrt{\pi}}{2},\ \int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^{3/2}\,e^{-x} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$

Loi de Stefan-Boltzmann : Energie émise par untité de surface et par seconde $= \sigma T^4$
avec $\sigma = 5.67\times10^{-8}$ Joules/sec/m^2/Kelvin^4

1 Polarisation de Spins

On considère un système 3D composé de fermions de spins 1/2 sans interactions. Les deux états de spin possibles sont $m_s = 1/2$ et $m_s = -1/2$. Dans un champ magnétique uniforme $H\hat{z}$ (*i.e.* dans la direction $\hat{z}$) l'énergie d'une particule dépend de la direction du spin par rapport au champ : $\epsilon = \hbar^2k^2/2m - 2\mu_0 H m_s$ où μ_0 est une constante ayant la dimension d'un moment magnétique.

[1] Donnez l'expression des densités d'états en impulsion $\rho(p)$ et en énergie $\rho(\varepsilon)$ (sans champ magnétique) en faisant l'hypothèse d'une symétrie sphérique.

[2] Trouvez les densités d'états en énergie des particules avec spins parallèles au champ, $D_{1/2}(\epsilon)$, et des particules avec spins anti-parallèles au champ, $D_{-1/2}(\epsilon)$. **ATTENTION** : Les fermions dont $m_s = 1/2$ ont une énergie inférieure à ceux dont $m_s = -1/2$.
Les fermions avec $m_s = 1/2$ ont une énergie inférieure. Représentez schématiquement, en fonction de ε, les densités d'énergie $D_{1/2}(\epsilon)$ et $D_{-1/2}(\epsilon)$. Sur le même graphe, représentez la densité totale d'énergie, $D(\epsilon) = D_{1/2}(\epsilon) + D_{-1/2}(\epsilon)$.

[3] Pour N particules dans un volume V à température nulle, trouvez l'expression du champ magnétique minimum H_0 qui permet d'aligner tous les spins parallèlement au champ. En d'autres termes, quel est le champ qui permet de ne plus avoir de particules avec un spin anti-parallèle au champ?

[4] Calculez H_0 en Tesla (un Tesla $= 10^4$ Gauss) pour des électrons dans du cuivre où le moment magnétique $\mu_0 = -9.27\times 10-21$ ergs-gauss^{-1}, la masse $m = 9.11\times10^{-28}$ grammes et la densité des électrons de conduction est $n \equiv N/V = 8.45\times10^{22}\mathrm{cm}^{-3}$.

[4] Calculez H_0 en Tesla pour l'helium liquide ^{3}He où le moment magnétique est celui du noyau avec $\mu_0 = 1.075\times10^{-23}$ ergs-gauss^{-1}, $m = 5.01\times10^{-24}$ grammes et la densité d'atomes dans le liquide est $n = 1.64\times10^{22}\mathrm{cm}^{-3}$.
On peut de nos jours acheter des solénoides pour des laboratoires de recherche permettant d'obtenir des champs de l'ordre de 15 Tesla. Au "Francis Bitter National Magnet Laboratory" (Boston, USA) des champs continus allant jusqu'à 37 Tesla et des champs pulsés allant jusqu'à 68 Tesla ont été obtenus.

[5] On considère maintenant des fermions ultra-relativistes $\epsilon = \hbar kc - 2\mu_0 H m_s$. Reprenez les questions [1],[2] and [3] dans ce cas. Est-il plus facile de polariser des fermions non-relativistes ou des fermions ultra-relativistes?

2 Rayonement et équilibre thermique

2.1 Expansion de l'univers

[a] A partir de l'expression de la grande fonction de partition pour les photons :

$$Q = \prod_\ell [1 - e^{-\epsilon_\ell/kT}]^{-1} \tag{1}$$

montrez que l'énergie libre d'un système de photons en équilibre thermique dans une cavité de volume V peut s'écrire comme :

$$F = \frac{2V}{\beta h^3}\int \mathrm{d}^3p\,\ln\left(1 - e^{-cp/kT}\right) \tag{2}$$

Calculez l'intégrale et donnez l'expression de F.

[b] Quelle est l'entropie S de ce système?

[c] Dans les premiers instants de son évolution, quand l'unvivers occupait un très petit volume et était très chaud, la matière et les radiations étaient en équilibre. Quand la température est tombée en dessous de 3000K, la matière et les radiations se sont découplées. La température de rayonnement cosmique (corps noir) a été mesurée et vaut actuellement 3K.

En supposant une expansion adiabatique, *i.e.* à entropie constante, calculez la fraction par laquelle l'univers a augmenté son volume depuis le découplage du rayonnement cosmique et de la matière.

On pense que la partie visible de l'univers est actuellement distante de 80×10^9 années lumières.

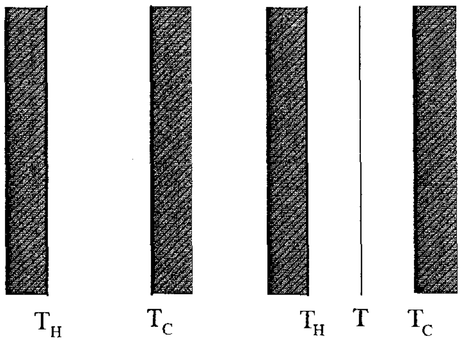
2.2 Température des planètes

La distance entre le soleil et la terre est de $200R_\circ$[1] où $R_\circ$ est le rayon du soleil. La température à la surface du soleil est $T_\circ = 6000K$.

[a] Ecrivez l'expression de la puissance émise par le soleil en le considérant comme un corps noir.

[b] Quelle est l'expression de la puissance émise par le soleil et arrivant sur la terre? (on notera R_E le rayon de la terre).

[1]La valeur précise est 215, mais on utilise 200 pour simplifier les calculs



[c] On suppose que la terre est également un corps noir de température T_e, exprimez la condition d'équilibre thermique entre la terre et le soleil. Calculez T_e. Cette valeur est-elle raisonable ?

[d] La distance entre Vénus et le soleil est de $150R_\circ$ [2], le rayon de Vénus est $R_V = 0.95R_E$ et pour simplifier les calculs on utilisera $R_V = R_E$. Répétez le calcul précédent et déterminez la température prédite pour Venus. La température moyenne sur Vénus est $730K$. Son atmosphère est composée de 96.5% de CO_2. Comment pouvez-vous expliquer le désaccord entre la température prédite et la température mesurée ?

2.3 Super Insolation

[a] Deux plaques parallèles d'extension infinie sont séparées par un vide, Fig. (a). La température de la plaque la plus chaude est T_H et celle de la plus froide est T_C. Trouvez une expression pour le flux de chaleur, J, en Watts/m^2 entre les deux plaques. Supposez que les deux plaques se comportent comme des corps noirs maintenus à des températures constantes T_H et T_C.

[b] Une fine couche d'un matériau conducteur de chaleur (un autre corp noir) est insérée dans le vide entre les deux plaques comme représenté sur la Fig. (b). La chaleur est transmise **uniquement** par radiation dans le vide. Trouvez l'état d'équilibre, *i.e.* la température de la fine couche. Aide : à l'équilibre que peut-on dire sur les flux nets de chaleur de T_H vers T et de T vers T_C ?

[c] le flux de chaleur de T_H vers T_C trouvé en [b] est une fraction $\mathcal{F}_1$ de celui trouvé en [a]. Trouvez $\mathcal{F}_1$.

[d] Deux fines couches conductrices sont maintenant insérées entre T_H et T_C. Le flux de chaleur de T_H vers T_C est une fraction $\mathcal{F}_2$ de celui trouvé en [a]. Trouvez $\mathcal{F}_2$.

[e] Pouvez-vous proposer une expression générale pour $\mathcal{F}_n$?

L'effet présenté ici qui consiste en une réduction substantielle de l'échange thermique, est utilisé pour construire des récipients fortement isolants, par exemple pour de l'Helium liquide.

[2] La valeur précise est de 155, utilisez 150 pour simplifier les calculs.