

Problème A : Ralentisseur Zeeman

Nous allons dans ce problème étudier une méthode consistant à ralentir un jet d'atomes grâce à l'action mécanique d'un laser contra-propageant au jet atomique. Pour que ce ralentissement soit efficace, il faut d'une part, que le laser soit résonnant avec une transition de l'atome ralenti et d'autre part que le ralentissement s'effectue sur une large plage de vitesses. On peut ainsi utiliser un tel ralentisseur à atomes comme source pour un piège magnéto-optique à atomes froids. Les atomes, principalement des alcalins, sont initialement extrait d'un four à une vitesse typique de 300m/s pour être ralentis jusqu'à 30m/s , la vitesse typique de capture d'un piège magnéto-optique (Voir Figure 1). Le laser est maintenu en résonance dans toute la gamme des vitesses en adaptant la fréquence de la transition atomique le long du chemin emprunté par le jet. Ce changement de fréquence est assuré par un champ magnétique inhomogène via l'effet Zeeman. C'est pour cette raison qu'un tel dispositif est appelé : "ralentisseur Zeeman".

Dans ce problème on considèra que l'axe du ralentisseur est selon $O\hat{z}$. La sortie du four est telle que la vitesse des atomes dans le plan transverse ($\hat{x} - \hat{y}$) pourra être considérée négligeable à la sortie du four uniquement.

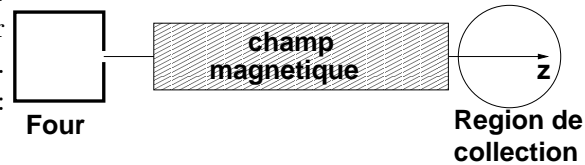


Fig. 1

On considère un ralentisseur Zeeman fonctionnant sur les atomes de sodium. Le problème est composé de quatre parties : dans la partie 1 on calculera les propriétés de la structure atomique de l'atome de sodium en présence d'un champ magnétique. Dans la partie 2, on étudiera quelques propriétés du refroidissement Doppler. Le profil du champ magnétique du ralentisseur est abordé dans la partie 3. La partie 4 est consacrée à quelques questions générales. Bien que interconnectées entres elles, chaque partie peut être traitée indépendamment. Des constantes physiques utiles sont données à la fin de l'énoncé.

1. Structure de l'atome

La structure de quelques niveaux énergétiques pertinents est donnée dans la Fig. 2. Les raies D correspondent aux transitions entre les niveaux $3s$ et $3p$. [On rappelle que le nombre quantique $n = 3$ correspond à l'état d'énergie de l'électron externe et que les symbols s et p denotent respectivement les états de moment angulaire orbitale $\ell = 0$ et $\ell = 1$].

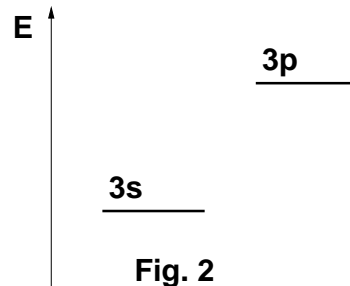


Fig. 2

Question A.1.1

En prenant en compte la contribution de la structure fine, corrigez le schéma énergétique de la Fig. 2 en spécifiant l'amplitude de la correction pour chaque sous-niveau dessiné. Spécifiez également la dégénérescence résiduelle et tracez les sous-niveaux magnétiques individuellement.

Question A.1.2

- Un champ magnétique est appliquée selon $O\hat{z}$. Montrez que la dégénérescence est complètement levée et tracez la structure des niveaux. On veillera à bien marquer les valeurs des nombres quantiques n , ℓ et m qui identifient chaque niveau.
- En utilisant l'expression du facteur de Landé, donnez le déplacement de chaque sous-niveau dans les unités appropriées.
- Calculez le déplacement des transitions qui correspondent aux raies D où les photons sont émis le long de l'axe de quantification.

Question A.1.3

En l'absence de champ magnétique, on considère l'interaction entre un atome et un champ électromagnétique (laser), se propageant le long de l'axe de quantification de l'atome de polarisation circulaire droite. La fréquence du champ laser sera choisie afin de satisfaire la condition de résonance avec la transition D_2 . Décrire qualitativement l'évolution de la population des sous-niveaux des niveaux $3s_{1/2}$ et $3p_{1/2}, 3p_{3/2}$. Quelle est la condition d'équilibre dans laquelle se trouve la population d'un ensemble d'atomes ?

Question A.1.4

On se place dans la situation précédente, et on considère l'interaction avec le spin nucléaire (le sodium est majoritairement constitué de l'isotope $A = 23$ qui possède un spin nucléaire $1/2$). Dans la suite on néglige le couplage entre le spin nucléaire et tout champ magnétique externe. Donnez une justification claire de cette approximation. La perturbation hyperfine est par contre prise en compte via le hamiltonien :

$$H_{hf} = \frac{\mathcal{A}}{\hbar^2} \vec{I} \cdot \vec{J}, \quad (1)$$

où \mathcal{A} est une constante dimensionnelle, et \vec{I} et \vec{J} représentent respectivement le moment angulaire nucléaire et le moment angulaire électronique total. En introduisant l'opérateur $\vec{F} = \vec{I} + \vec{J}$, diagonalisez le hamiltonien en indiquant la base correspondante (en précisant le(s) nombre(s) quantique(s) impliqué(s)).

On applique maintenant le champ magnétique externe. Ecrivez à l'aide du théorème de Wigner-Eckart l'identifiant des états sélectionnés par les processus de la question précédente.

2. Considérations physiques

Question A.2.1

Le mouvement du centre de masse d'un atome, du à sa vitesse thermique, déplace dans le référentiel du laboratoire la fréquence de la transition atomique par effet Doppler de la quantité suivante :

$$\Delta\omega_D = 2\sqrt{\ln 2}\omega_0\sqrt{\frac{2k_B T}{mc^2}} \quad (2)$$

où ω_D représente la pulsation (ou fréquence) Doppler, ω_0 celle de la transition atomique dans le référentiel à repos de l'atome, k_B est la constante de Boltzmann, T la température absolue, m la masse de l'atome et c la vitesse de la lumière dans le vide.

Comparez l'élargissement Doppler à la largeur naturelle de la transition déterminée par la constante de relaxation du niveau supérieur Γ en prenant le rapport entre les deux quantités. Pour les valeurs des constantes physiques, la masse de l'atome considéré et à une température $T = 600\text{K}$ calculer $\Delta\omega_D/\Gamma$.

Question A.2.2

a. L'interaction entre le champ électromagnétique qui ralentit les atomes dépend de la différence de fréquence $\delta = \omega - \omega_0$ entre le laser et la transition atomique. Utilisant l'expression de la force dissipative, évaluez le rapport entre les valeurs de cette force à $|\delta| = \Gamma$ et $|\delta| = \Delta\omega_D$. Quelle conclusions en tirez vous ?

b. Donnez l'expression de la force dissipative en prenant en compte le décalage Doppler introduit par le mouvement (unidimensionnel, selon $+\hat{z}$) des atomes [*Suggestion : ne pas utiliser le paramètre de saturation s dans ces expressions, mais plutôt les formes explicites*].

Pour un jet atomique de vitesse moyenne \bar{v} (et de distribution maxwellienne donnée en appendice) se dirigeant vers un faisceau laser ralentisseur avec $\delta = -2\Gamma$ tracez en fonction de kv , sur un même graphe avec axes appropriés l'allure des quantités suivantes :

- le nombre d'atomes se déplaçant à vitesse $\vec{v} = v\hat{z}$ en fonction de la vitesse [*Suggestion : on pourra utiliser la quantité kv à la place de v pour obtenir des axes homogènes*];
- le nombre d'atomes ayant pulsation de résonance apparente $\omega_0 + kv$ (ω_0 étant la pulsation propre de l'atome dans son référentiel ; $\hbar\omega_0 = \Delta E$, avec ΔE saut énergétique de la transition de l'atome à repos) ;
- l'amplitude de la force dissipative pour chaque classe d'atomes.

Commentez vos courbes.

Sur l'échelle horizontale indiquez simultanément des valeurs de référence en pulsation (unités de ω) et en vitesse (unités kv).

3. Forme du champ magnétique

On veut trouver la dépendance spatiale que devra avoir le champ magnétique, le long de l'axe $O\hat{z}$ pour pouvoir ralentir un maximum d'atomes. On considère dorénavant uniquement la transition $F = 1 \leftrightarrow F' = 2$ (F' étant le nombre quantique de l'état excité) de la raie D_2 .

Question A.3.1

Écrire la forme généralisée du décalage en fréquence δ qui prend en compte le décalage entre la pulsation laser et la pulsation atomique ($\delta_0 = \omega_L - \omega_0$), le décalage Doppler (donné par kv) et le décalage Zeeman (que l'on écrira proportionnel à B par une constante K qui rassemble toute autre contribution, y compris celles de la transition atomique).

Question A.3.2

Sur la base de considérations cinématiques qui décrivent le mouvement d'un point matériel soumis à une force constante, en déduire l'expression de la vitesse en fonction de la position. [*Suggestion : on écrira l'évolution de la position $z(t)$ en fonction du temps pour un mouvement accéléré - accélération a - à partir de la position $z(0) = 0$ et la vitesse en fonction du temps avec vitesse initiale v_0 . L'élimination du temps t donnera l'information cherchée*].

Question A.3.3

Puque la force dissipative est maximale à décalage (généralisé) nul, cette condition fournit une relation optimale entre l'amplitude du champ magnétique et la vitesse (c.à.d. la position le long de l'axe $O\hat{z}$). Ceci donnera la forme que le champ magnétique doit prendre en fonction de z (on considérera le décalage laser-atome nul pour déterminer cette forme).

Trouver la forme du champ B en fonction de la position z .

4. Question physiques diverses

Question A.4.1

Dans quelle direction faut-il orienter le champ magnétique ?

Question A.4.2

Sachant qu'une bobine circulaire parcourue par un courant I génère un champ magnétique le long de son axe, comment pourra-t-on imaginer de créer le champ B du ralentisseur ?

Question A.4.3

Le nombre de photons $N(t)$ échangés au cours du ralentissement peut être exprimé en fonction du temps de la façon suivante :

$$N(t) = \frac{v_i - v(t)}{v_r}, \quad (3)$$

$$v_r = \frac{\hbar k}{M}, \quad (4)$$

où v_r est la vitesse de recul de l'atome, v_i la vitesse initiale et $v(t)$ la vitesse au temps t (on appellera dans la suite v_f la vitesse finale acquise à la fin du ralentisseur). Puisque l'émission spontanée, qui intervient dans le mécanisme de ralentissement le long de l'axe z , est isotrope, la vitesse transverse (c.à.d. le long de x ou bien y) moyenne de chaque atome et sa dispersion pourront être écrites dans la forme :

$$\langle v_{\perp} \rangle = 0, \quad (5)$$

$$\langle v_{\perp}^2 \rangle \approx \frac{v_r^2}{3} N(t). \quad (6)$$

On justifiera ces dernières expressions. Interpréter le résultat physiquement (en termes de refroidissement/rechauffement)

Question A.4.4

Montrer par un argument qualitatif que $v \propto \sqrt{\frac{T}{M}}$.

Considérant $v_f \ll v_i$ montrer que $N(t) \propto \sqrt{M}$ et donc que $\langle v_{\perp}^2 \rangle \propto M^{-3/2}$. Quelles conclusions tirez-vous pour des atomes de différente masse ?

Problème B : Opérateur déplacement

Remarque : en appendice on trouvera des identités utiles à démontrer les propriétés cherchées dans ce problème.

Question B.1.1

Montrer que

$$|z\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{za^\dagger} e^{-z^*a} |0\rangle, \quad (7)$$

sachant qu'une définition pour l'état cohérent $|z\rangle$ est la suivante :

$$|z\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{za^\dagger} |0\rangle. \quad (8)$$

[Suggestion : calculer la quantité $e^{-z^*a}|0\rangle$ en utilisant le développement de l'opérateur e^{-z^*a}].

Question B.1.2

Utilisant l'identité de Campbell-Baker-Hausdorff et les propriétés du commutateur $[za^\dagger, -z^*a]$ trouver l'expression explicite de l'opérateur déplacement $D(z)$ ainsi défini :

$$|z\rangle = D(z)|0\rangle. \quad (9)$$

[Suggestion : pour les nécessités des calculs qui suivent, on cherche une expression de $D(z)$ contenant une seule fonction exponentielle].

Question B.1.3

Montrer que l'opérateur déplacement est unitaire, c.à.d. :

$$\begin{aligned} D^\dagger(z)D(z) &= D(z)D^\dagger(z) \\ &= \mathbf{1}, \end{aligned} \quad (10)$$

et donner l'expression explicite de $D^\dagger(z)$. Montrer ainsi que

$$D^\dagger(z) = D(-z). \quad (11)$$

Question B.2.1

Montrer que

$$[-za^\dagger + z^*a, a] = z, \quad (12)$$

$$[-za^\dagger + z^*a, a^\dagger] = z^*. \quad (13)$$

Question B.2.2

Montrer enfin que

$$D^\dagger(z)aD(z) = a + z\mathbf{1}, \quad (14)$$

$$D^\dagger(z)a^\dagger D(z) = a^\dagger + z^*\mathbf{1}. \quad (15)$$

Interpréter le nom donné à cet opérateur.

APPENDICES

A1. Distribution maxwellienne de vitesse

À une dimension, la distribution de vitesses maxwellienne que l'on suppose reproduire la distribution thermique des atomes sortants du four, peut être écrite de la forme :

$$f(v) = C \times \exp \left\{ -\frac{Mv^2}{2k_B T} \right\}, \quad (16)$$

où M est la masse atomique, v la vitesse dans la direction considérée (le long de l'axe \hat{z} dans notre problème), k_B la constante de Boltzmann et T la température absolue. La constante C englobe à la fois la normalisation et le nombre d'atomes qui se trouvent dans le jet sortant du four.

A2. Constantes physiques de l'espèce atomique considérée

Atome considéré : Na

Nombre atomique : 11

Masse atomique : $M_{Na} \approx 3.82 \times 10^{-26}$ Kg

Isotope prépondérant ^{23}Na (≈ 99.95 %)

Spin nucléaire : $I = \frac{1}{2}$

Longueur d'onde des deux raies D : $\lambda_{D_1} \approx 589.6$ nm, $\lambda_{D_2} \approx 589.0$ nm

Transition utilisée pour le refroidissement : D_2

Temps de relaxation des niveaux excités : $\tau_{D_1} = 33$ ns, $\tau_{D_2} = 16$ ns

Température du four : $T = 600$ K

A3. Propriétés des opérateurs

- Développement de l'exponentiel d'un opérateur A :

$$\exp \{ \pm cA \} = \mathbf{1} \pm cA + \frac{(cA)^2}{2!} \pm \dots, \quad (17)$$

où $\mathbf{1}$ est l'opérateur unité et c un nombre complexe.

- Identité de Campbell-Baker-Hausdorff (pour les opérateurs A et B) :

$$\exp \{ A + B \} = e^A e^B \exp \left\{ -\frac{1}{2} [A, B] \right\}, \quad (18)$$

valable si une des deux conditions suivantes (équivalentes) est satisfaite :

$$\begin{aligned} [A, [A, B]] &= [B, [A, B]] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$[A, B] = c\mathbf{1}, \quad (20)$$

où c est un nombre complexe.

- Théorème de développement d'opérateurs (opérateurs A et B) :

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \frac{1}{3!} [A, [A, [A, B]]] + \dots \quad (21)$$