Master ΩMEGA

Examen Physique Atomique

Durée : 3 heures

Tous documents permis

Novembre 2005

Problème A : Considérations sur les champs quantifiés

On considère un champ électromagnétique, décrit en représentation de Heisenberg, où un seul mode est peuplé :

$$\vec{E}(\vec{r},t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 L^3}}\left[a_k\vec{e}_s(\hat{k})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} - a_k^\dagger\vec{e}_s^{\,\star}(\hat{k})e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}\right] . \tag{1}$$

avec $\vec{k}$ le vecteur d'onde, $\omega_k = c|\vec{k}|$ la pulsation , et $\vec{e}_s(\hat{k})$ la polarisation.

Soit deux opérateurs hermitiques,

$$a_P^{(k)} = \frac{1}{2}(a_k + a_k^\dagger)\,, \tag{2}$$

$$a_Q^{(k)} = \frac{-i}{2}(a_k - a_k^\dagger)\,, \tag{3}$$

combinaison linéaires de a_k et $a_k^\dagger$.

Remarque : afin d'alléger les notations dans la suite on indiquera explicitement les indices k seulement aux endroits qui pourraient donner lieu à des ambiguités.

Question A.1.1

a. Calculer le commutateur $[a_P, a_Q]$ et en déduire que $\Delta a_P \Delta a_Q \geq \frac{1}{4}$.

b. Montrer que l'hamiltonien pour le mode peuplé peut être écrit sous la forme :

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}\left(a^\dagger a + a a^\dagger\right) \tag{4}$$

$$= \hbar\omega\left(a_P^2 + a_Q^2\right) . \tag{5}$$

Question A.1.2

a. Écrire le champ électrique $\vec{E}(\vec{r},t)$ en fonction des opérateurs a_P et a_Q.

b. Montrer que les opérateurs a_P et a_Q représentent deux composantes en quadrature du champ.

c. De la valeur non nulle du commutateur $[a_P, a_Q]$, en déduire une conséquence physique sur la mesure du champ.

Question A.1.3

a. Montrer que la composante du champ électrique dephasé de l'angle θ par rapport à a_P s'écrit

$$a_\theta \equiv a_P\cos\theta + a_Q\sin\theta \tag{6}$$

b. Montrer que l'hamiltonien peut être réécrit de la forme

$$H = \hbar\omega\left(a_\theta^2 + a_{\theta,\perp}^2\right) , \tag{7}$$

où $a_{\theta,\perp}$, dont on donnera la forme explicite, correspond à l'opérateur orthogonal à a_θ.

c. Quelle est la signification physique de ce résultat ?

Question A.1.4

a. Calculer les valeurs moyennes $< a_P >$, $< a_Q >$, $< a_\theta >$ et $< a_{\theta,\perp} >$ sur un état cohérent $|z>$.

b. Calculer les dispersions $\Delta_z a_P$, $\Delta_z a_Q$, $\Delta_z a_\theta$ et $\Delta_z a_{\theta,\perp}$.

[On rappelle que $\Delta_z \hat{O} \equiv \sqrt{< z|\hat{O}^2|z > -(< z|\hat{O}|z >)^2}$*,* $\hat{O}$ *représente un opérateur quelconque et l'écriture* Δ_z *indique le fait que la dispersion est calculée sur l'état cohérent* $|z>$*].*

c. Commenter physiquement ce résultat. Pourrait-on trouver une combinaison de directions pour lesquelles les différentes quadratures du champ électrique peuvent être mesurées indépendamment ? Dans quelle direction obtient-on une incertitude minimale sur les deux composantes ?

d. Tracer le champ $\vec{E}(\vec{r} = 0)$, mesuré sur l'état cohérent $|z>$:

(i) sur le plan des deux quadratures à différent temps judicieusement choisis.

(ii) en fonction du temps (sur au moins une période). Dans les deux cas on mettra clairement en évidence la dispersion. (On se servira de la valeur $|z| = 1$ pour tracer le dessin à l'échelle).

e. En supposant que le champ peut être décrit par un champ classique ayant des fluctuations de phase et d'amplitude, indiquer sur les dessins précédents les temps où les fluctuations du champ sont respectivement purement d'amplitude et purement de phase.

f. En appliquant une transformation de Bogoliubov de coefficients $\lambda = \sqrt{2}$ et $\mu = 1$ on tracera à nouveau les deux diagrammes de la question précédente. Sur la base du diagramme de $\vec{E}(t)$ déterminer la quantité physique (amplitude ou phase) que l'on pourra mesurer avec plus de précision que dans la question précédente.

Question A.1.5

On superpose au mode précédent un deuxième mode du champ électrique, que l'on notera $\vec{E}'(\vec{r}, t)$, de pulsation ω', vecteur d'onde $\vec{k}'$ et polarisation $\vec{e}_s(\hat{k}')$ (cf. eq. (1) pour la définition). Sur le champ total $\vec{E}_T = \vec{E} + \vec{E}'$ on mesure simultanement les quantités suivantes :

- la dispersion de la composante $\vec{E}(\vec{r} = 0, t = 0)$ du champ $\vec{E}_T$ sur l'état cohérent $|z>$;
- la valeur moyenne du champ électrique $\vec{E}_T(\vec{r} = 0, t = 0)$ sur l'état $|n_{\omega_{k'}, \vec{k}', \vec{e}_s(\hat{k}')} >= |1>$.

a. Quel sera le résultat de cette mesure ?

b. Quelle sera la dispersion $\Delta_0 \vec{E}'(\vec{r}, t)$ (c.à.d. mesuré sur l'état du vide $|0>$) ? Comparez ce résultat à la dispersion du champ $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\Delta_z \vec{E}(\vec{r} = 0, t)$, simultanément mesurée sur l'état cohérent $|z>$ et déjà calculé à la question A.1.5.a. Tirer des conclusions.

Problème B : Diffusion de Rayleigh

On se propose de calculer la section efficace de diffusion élastique (sans changement de fréquence) d'un photon par un atome d'hydrogène dans le cas où l'énergie du photon $\hbar\omega$ est très petite devant celle de toute transition entre états de l'atome. Ceci correspond à la situation physique suivante : après la diffusion, l'atome revient dans l'état initial (qui est l'état plus bas en énergie) tandis que le photon incident est transformé en un nouveau photon de vecteur d'onde et polarisation différentes.
Dans la première partie du problème on étudiera le processus de diffusion Rayleigh sur un atome à deux niveaux. Dans la deuxième partie on recalculera certaines proprietés physique de l'atome d'Hydrogène et dans la troisième partie on mettra ensemble les résultats obtenus pour arriver à la section efficace de diffusion élastique pour le cas qui nous intéresse.

Remarque *: les parties 1 et 2 sont indépendantes. Certains résultats des parties 1 et 2 sont utilisés dans la partie 3.*

PARTIE 1

Soit un atome à deux niveaux ayant un état a d'énergie E_a et un état b d'énergie E_b ($E_b - E_a = \hbar\omega_0 > 0$). On considérera l'atome immobile dans tout le calcul et positionné à l'origine du répère. L'Hamiltonien d'interaction sera de la forme :

$$H_I = -\vec{d} \cdot \vec{E}(0)\,, \tag{8}$$

où le champ électrique sera décrit par :

$$\vec{E}(\vec{r}) = i\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 L^3}} \sum_{\vec{k}} \sum_{s} \sqrt{\omega_k} \left[a_{\vec{k},s}\, \vec{e}_s(\hat{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} - a^\dagger_{\vec{k},s} \vec{e}^{\,\star}_s(\hat{k}) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}\right]\,, \tag{9}$$

et l'opérateur $\vec{d}$ représente le couplage dipolaire entre les deux états atomiques. La diffusion Rayleigh est telle que $\hbar\omega \ll E_b - E_a$.

On représentera les états du système par l'état de l'atome suivi de celui du photon. Par exemple l'état

$$|a; 1, \vec{k}, \vec{e}_s(\hat{k}) > \tag{10}$$

représente l'atome dans l'état a accompagné d'un photon de vecteur d'onde $\vec{k}$ et de polarisation $\vec{e}_s(\hat{k})$ dans le champ électromagnétique.

Question B.1.1

a. Donner l'expression explicite des éléments de matrice d'interaction en utilisant les éqs. (8,9) :

$$< a; 0, \vec{k}, \vec{e}|H_I|b; 1, \vec{k}, \vec{e} >\,, \tag{11}$$

$$< b; 0, \vec{k}, \vec{e}|H_I|a; 1, \vec{k}, \vec{e} >\,, \tag{12}$$

Préciser à quel processus élémentaire (absorption, emission,...) ces éléments de matrice correspondent-ils.

b. Donner formellement l'expression explicite des éléments de matrice d'interaction en utilisant les éqs. (8,9) :

$$< a; 1, \vec{k}, \vec{e}; 1, \vec{k}', \vec{e}'|H_I|b; 1, \vec{k}, \vec{e} >\,, \tag{13}$$

$$< b; 1, \vec{k}, \vec{e}; 1, \vec{k}', \vec{e}'|H_I|a; 1, \vec{k}, \vec{e} >\,, \tag{14}$$

Préciser à quel processus élémentaires ces éléments de matrice correspondent-ils.

Question B.1.2

a. Montrer que les probabilités de transition au premier ordre du type :

$$< i; n, \vec{k}, \vec{e}|H_I|i; n', \vec{k'}, \vec{e'} > \tag{15}$$

sont nulles.

b. L'élément de matrice de transition par unité de temps pour le processus au deuxième ordre qui diffuse un photon à partir de l'état a de l'atome est donnée par :

$$\begin{aligned} T \quad = \quad & \left\{ \frac{< a; 1, \vec{k}', \vec{e}'_s(\hat{k}')|H_I|b; 0 >< b; 0|H_I|a; 1, \vec{k}, \vec{e}_s(\hat{k}) >}{E_a + \hbar\omega - E_b} + \right. \\ & \left. + \frac{< a; 1, \vec{k}', \vec{e}'_s(\hat{k}')|H_I|b; 1, \vec{k}', \vec{e}'_s(\hat{k}'); 1, \vec{k}, \vec{e}_s(\hat{k}) >< b; 1, \vec{k}', \vec{e}'_s(\hat{k}'); 1, \vec{k}, \vec{e}_s(\hat{k})|H_I|a; 1, \vec{k}, \vec{e}_s(\hat{k}) >}{E_a - \hbar\omega - E_b} \right\} . \end{aligned} \tag{16}$$

Représenter les différents termes de la matrice de transition en se servant des diagrammes de Kastler et de Feynman correspondants.

c. Introduire dans l'élément de matrice T l'approximation $\omega \ll \omega_0$.

Question B.1.3

a. Utilisant l'expression de la densité de modes du champ électromagnétique usuellement définie $\mathcal{D}(\omega)$ montrer que la probabilité de transition par unité de temps et par unité d'angle solide définie par

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} \quad = \quad \frac{2\pi}{\hbar}|T|^2\delta^T\left(\hbar(\omega - \omega')\right)\frac{\mathcal{D}(\omega')}{d\Omega} , \tag{17}$$

prend la forme :

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} \quad = \quad \frac{2\pi}{\hbar}|T|^2\frac{L^3}{8\pi^3}\frac{(\hbar ck)^2}{\hbar^3c^3} , \tag{18}$$

où la fonction δ^T est une généralisation de la δ de Dirac à largeur finie qui sélectionne les transitions possibles.

b. Avec des arguments dimensionnels, montrer que le flux de photons incidents peut être écrit de la forme $\Phi_i = \frac{c}{L^3}$.

Question B.1.4

a. Utilisant la définition de section différentielle de diffusion $\frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv \frac{d\Gamma}{d\Omega}\frac{1}{\Phi_i}$, en obtenir son expression explicite. On en donnera en particulier la dépendence avec ω.

b. En considérant $\vec{e}//\hat{z}$, montrer que l'expression de la section efficace de collision σ (section efficace intégrale) prend la forme (en se limitant, pour simplicité dans le calcul explicite, à des états ayants $l = 0$ et $l = 1$) :

$$\sigma \quad = \quad \frac{q_e^4}{6\pi\epsilon_0^2}\frac{\omega^4}{c^4}\left(\frac{|< a|r|b >|^2}{\Delta E}\right)^2 , \tag{19}$$

où on a utilisé la decomposition usuelle pour l'opérateur position $\vec{r} = r\hat{r}$. *[Remarque : pour le calcul on pourra se servir d'une relation rappellée à la fin de cet énoncé]*

PARTIE 2

Question B.2.1

Par des calculs simples et en utilisant des arguments physiques, obtenir l'énergie des états liés de l'hydrogène, en négligeant l'interaction spin-orbite. Calculer les valeurs numériques des deux premiers états $n = 1, 2$. Quelle est la dégénérescence de chaque état ?

Question B.2.2

Montrer par un calcul rapide comment sont modifiés les états d'énergie de l'atome d'Hydrogène si l'on prend en compte l'interaction spin-orbite. Calculer la correction pour chacun des états considérés à la question précédente. Existe-t-il encore une dégénérescence dans ce cas ? Tracer un diagramme montrant les énergies des niveaux $n = 1$ et $n = 2$ en spécifiant bien les sous-niveaux éventuellement dégénérés.

Question B.2.3

On rajoute un champ magnétique faible $\vec{B} = B_z\hat{z}$, où l'axe z est choisi comme axe de quantification du problème. Calculer la correction aux niveaux d'énergie obtenus aux questions B.1.1 et B.1.2 tout en précisant la condition pour laquelle $|B|$ peut être considéré comme étant faible. Les niveaux de l'atome de H sont-ils maintenant dégénérés ? Tracer un diagramme montrant les énergies des niveaux $n = 1$ et $n = 2$ en spécifiant bien les sous-niveaux éventuellement dégénérés.

Question B.2.4

Montrer quelles sont les transitions dipolaires permises entre les premiers niveaux, et sous-niveaux, $(n = 1 \ldots 3)$ de l'atome d'Hydrogène.

PARTIE 3

On applique les résultats de la partie 1 au calcul de la diffusion Rayleigh sur le niveau fondamental de l'atome d'hydrogène.

Question B.3.1

a. Si l'atome se trouve à l'état fondamental $(n = 1)$, trouver les éléments de matrice qui contribuent à la transition en se restreignant au seul niveau $n = 2$.

b. Montrer que l'expression de l'amplitude de probabilité de transition, éq. (16), devient :

$$T = -\frac{\hbar\omega}{2L^3}\sum_{q,q'} A_{q,q'}(\hat{r}_q \cdot \vec{e}_s^{\star}(\hat{k}_{q'}))(\hat{r}_{q'}^{\star} \cdot \vec{e}_s(\hat{k}_q)) \tag{20}$$

où

$$A_{q,q'} = -\frac{q_e^2}{\epsilon_0}\sum_j \frac{< a|\vec{d}\cdot\hat{r}_q|b_j >< b_j|\vec{d}\cdot\hat{r}_{q'}^{\star}|a > + < a|\vec{d}\cdot\hat{r}_{q'}^{\star}|b_j >< b_j|\vec{d}\cdot\hat{r}_q|a >}{E_a - E_{b,j}} \tag{21}$$

au cas où plusieurs niveaux b_j participent à l'interaction.

c. Calculer explicitement les éléments de matrice.

Question B.3.2

a. Montrer que la probabilité de transition par unité de temps et par unité d'angle solide, éq. (18), devient maintenant :

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{2\pi}{\hbar}\left(\frac{\hbar\omega}{2L^3}\right)^2\left(\sum_{q,q'} A_{q,q'}(\hat{r}_q \cdot \vec{e}_s^{\star}(\hat{k}_{q'}))(\hat{r}_{q'}^{\star} \cdot \vec{e}_s(\hat{k}_q))\right)^2 \frac{L^3}{8\pi^3}\frac{(\hbar ck)^2}{\hbar^3c^3}\,, \tag{22}$$

b. Sur la base des résultats obtenus donner l'expression explicite de la section efficace de collision, éq. (19).

Relations utiles

- Pour deux opérateurs $\hat{A}$ et $\hat{B}$ dont le commutateur vaut $[\hat{A}, \hat{B}] = iC$ (avec $C = C^\dagger$) alors les dispersions $\Delta\hat{A}$ et $\Delta\hat{B}$ satisfont les relations suivantes :

$$\Delta\hat{A}\Delta\hat{B} \geq \frac{1}{2}|C| \tag{23}$$

- Pour la densité d'états d'un photon on pourra partir de la relation $\mathcal{D}(\vec{k})d^3k = \mathcal{D}(E_{ph})dE_{ph}$ et du fait que son énergie vaut $E_{ph} = \hbar ck$.
- On rappelle l'expression donnée dans M. Le Bellac, *Physique Quantique*, chapitre 14.3.4 :

$$\left|\sum_s \vec{e}_s^{\,\star} \cdot < f|\hat{r}|i >\right|^2 = \sum_{q,q'} (\delta_{q,q'} - \hat{k}_q \hat{k}_{q'}^\star) < f|\hat{r}_q^\star|i >< i|\hat{r}_{q'}|f > \tag{24}$$

qui pourra être utilisée pour le calcul de l'intégral de la section efficace de diffusion.

Constantes physiques

Symbole	Quantité physique	Valeur
m_e	Masse de l'électron	$9.11 \times 10^{-31} Kg$
m_p	Masse du proton	$1.67 \times 10^{-27} Kg$
q_e	Charge de l'électron	$1.6 \times 10^{-19} Coulomb$
e	Charge de l'électron	$4.803 \times 10^{-10} u.e.s.$
$\hbar$	Planck's constant	$1.054 \times 10^{-34} J\, s$
α	Constante de structure fine	$\frac{1}{137}$
$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$	Rayon de Bohr	$0.529 \times 10^{-10} m$
μ_B	Magnéton de Bohr	$9.27 \times 10^{-24} J\, Tesla^{-1}$
μ_N	Magnéton nucléaire de Bohr	$5.51 \times 10^{-27} J\, Tesla^{-1}$
k_B	Boltzmann's constant	$1.38 \times 10^{-23} J\, K^{-1}$

Fonctions d'onde des premiers états de l'Hydrogène

$$\phi_{n=1,l=0,m=0}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} \exp\left\{-\frac{r}{a_0}\right\} \tag{25}$$

$$\phi_{n=2,l=0,m=0}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{8\pi a_0^3}} \left(1 - \frac{r}{2a_0}\right) \exp\left\{-\frac{r}{2a_0}\right\}, \tag{26}$$

$$\phi_{n=2,l=1,m=-1}(r,\theta,\phi) = -\frac{1}{8\sqrt{\pi a_0^3}} \frac{r}{a_0} \exp\left\{-\frac{r}{2a_0}\right\} \sin\theta e^{\{i\phi\}}, \tag{27}$$

$$\phi_{n=2,l=1,m=0}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi a_0^3}} \frac{r}{a_0} \exp\left\{-\frac{r}{2a_0}\right\} \cos\theta, \tag{28}$$

$$\phi_{n=2,l=1,m=+1}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{8\sqrt{\pi a_0^3}} \frac{r}{a_0} \exp\left\{-\frac{r}{2a_0}\right\} \sin\theta e^{\{-i\phi\}}. \tag{29}$$