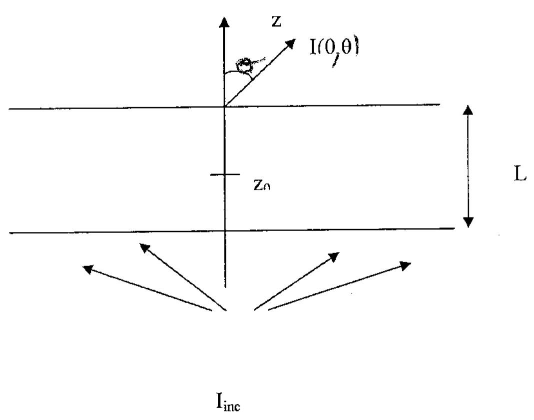
Université de Nice-Sophia
Master OMEGA- parcours Astrophysique
M1

Examen « Physique des étoiles »

14 avril 2008
(M. Faurobert)

I- Atmosphère

On observe une atmosphère stellaire dan,s laquelle un nuage plus dense et plus froid est en équilibre à une altitude z_0. Ce nuage est modélisé par une couche plan-parallèle isotherme d'épaisseur L (voir figure). Il est illuminé par le rayonnement continu venant de la photosphère sous-jacente.



On observe le rayonnement sortant par la face supérieure du nuage dans une direction faisant l'angle θ avec la verticale du lieu.

1) A l'intérieur du nuage le rayonnement peut être absorbé ou diffusé de manière isotrope. On note k_a le coefficient d'absorption et k_d le coeffcient de diffusion. On supposera que ces coefficients ne dépendent pas de la fréquence du rayonnement. Montrer que l'équation de transfert à l'intérieur du nuage s'écrit

$$\mu\frac{dI(z,\mu)}{dz} = -k_a I(z,\mu) - k_d I(z,\mu) + k_d\int_{-1}^{1} I(z,\mu')\frac{d\mu'}{2} + k_a B,$$

où $\mu = \cos(\theta)$ et B est la fonction de Planck à l'intérieur du nuage.
Quelles sont les conditions aux limites pour cette équation sur les faces inférieure et supérieure du nuage ?

2) En introduisant la variable de profondeur optique τ, telle que $d\tau = -(k_a + k_d)dz$ et $\tau = 0$ sur la face supérieure du nuage, réécrire cette équation. En supposant que les coefficients d'absorption et de diffusion sont uniformes dans le nuage, que vaut l'épaisseur optique totale du nuage ? On la note T. Quelle est l'expression de la fonction source ? Donner la solution formelle pour $I(\tau,\mu)$ à l'intérieur du nuage pour $\mu > 0$ (directions sortantes) et en déduire l'expression de l'intensité émergente en haut du nuage dans la direction θ, $I(\tau = 0,\mu)$..

3) La solution formelle écrite précédemment ne permet pas de calculer $I(\tau = 0,\mu)$ car la fonction source comporte un terme de diffusion qui dépend de $I(\tau,\mu)$. On peut cependant en déduire une expression approchée de $I(\tau = 0,\mu)$ dans le cas où l'épaisseur optique du nuage T est faible. En effet, dans ce cas la fonction source peut être approchée par

$$S(\tau) \approx \frac{k_d}{k_a + k_d}\int_0^1 I_{inc}(\mu')\frac{d\mu'}{2} + \frac{k_a}{k_a + k_d}B.$$

Pouvez-vous justifier cette approximation ?

En déduire une expression approchée pour $I(\tau = 0,\mu)$. On écrira $\exp(-\frac{T}{\mu}) \approx 1 - \frac{T}{\mu}$.

Discutez la signification physique des 3 termes qui apparaissent dans l'expression approchée de $I(\tau = 0,\mu)$.

II- Structure interne

On considère un astre à symétrie sphérique en équilibre hydrostatique et thermique.
1) Ecrire les équations différentielles qui traduisent ces 2 conditions d'équilibre. On notera ε le taux de création d'énergie par unité de masse, M_r la masse contenue à l'intérieur de la sphère de rayon r, $P(r)$ la pression, $\rho(r)$ la masse volumique et $L(r)$ la luminosité.

2) Donnez la relation qui lie M_r et la masse volumique $\rho(r)$.

3) On suppose que le transport d'énergie dans cet objet est dû à des mouvements de convection adiabatiques. On note $\gamma = C_p / C_v$.
Donnez l'expression du gradient de température ∇_T, en déduire l'expression de $\partial T/\partial r$ en fonction de $\partial P/\partial r$.

4) Ici on supposera que la pression est due à des électrons dégénérés non relativistes. Quelle est alors l'équation d'état?
En éliminant ρ écrivez un système de 4 équations différentielles pour les 4 quantités $P(r)$, $T(r)$, $M_r(r)$, $L(r)$.
Quelles sont les conditions aux limites pour ces équations?

5) Supposons maintenant que le taux de création d'énergie est nul. Que peut-on en déduire pour la quantité L?

6) On obtient des équations réduites en effectuant le changement de variables $x=r/R$, $p=P/P_0$, $t=T/T_{eff}$ et $m=M_r/M$, où R est le rayon d'équilibre de l'astre, M sa masse, T_{eff} la température effective et P_0 une constante choisie de façon à simplifier les équations réduites.
Donnez les équations réduites et l'expression de P_0. Montrez que l'équation réduite pour m contient une constante C dont on donnera l'expression.

7) Montrez que C doit avoir la même valeur pour tous les astres dont la structure est décrite par les équations réduites. En déduire qu'il existe une relation entre le rayon et la masse de ces objets, de la forme

$R = aM^{-1/3}$,

où a est une constante.