Master Ωmega1
Université de Nice-Sophia Antipolis
Théories Relativistes de la Gravitation
Examen du 15 Avril 2008
Durée : 2 heures

L'épreuve se compose de 2 exercices indépendants

**Exercice 1 : métrique conformément plane**

Soit une variété dont le tenseur métrique s'écrit

$$g_{\alpha\beta} = \exp(\phi)\, \eta_{\alpha\beta} \tag{1}$$

où $\phi$ est une fonction scalaire, et $\eta_{\alpha\beta}$ la métrique de Minkowsky sous la forme (pseudo-) cartésienne ($\eta_{\alpha\beta} = diag\,(-1, +1, +1, +1)$).

Remarque (notation) : pour les dérivées de $\phi$, on pourra, si on souhaite alléger l'écriture, adopter les notations (standards) suivantes

$$\begin{aligned} \phi_\alpha &\equiv \partial_\alpha \phi \ , \quad \phi_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha \partial_\beta \phi \ , \quad .... \\ \phi^\alpha &\equiv \eta^{\alpha\beta} \partial_\beta \phi \ , \quad .... \end{aligned}$$

1 - Comment s'écrivent les composantes contravariantes $g^{\alpha\beta}$ de ce tenseur métrique ?

2 - Calculer les composantes de la connexion de Christoffel correspondante.

3 - Montrer que, pour toute métrique (pas nécessairement de la forme (1) a priori), le vecteur tangeant

$$k^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$$

où $\lambda$ est un paramètre affine, est de module constant le long de toute courbe geodésique.

4 - Ecrire alors l'équation des geodésiques (prise sous la forme que vous souhaitez) pour la métrique (1).

5 - En déduire que, dans le cas d'une geodésique correspondant à l'orbite d'un photon, les composantes covariantes $k_\alpha$ sont constantes.

**Exercice 2 : orbites libres dans la métrique de Schwarzschild**

On rappelle l'expression de la métrique de Schwarzschild dans le vide

$$ds^2 = -e^{\nu} dt^2 + e^{-\nu} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \quad avec \quad e^{\nu} = 1 - \frac{2m}{r}. \qquad (2)$$

Le but de l'exercice est de comparer les périodes de révolution d'une particule d'épreuve, qu'on appellera la *planète*, dans ce champ gravitationnel telles qu'elles sont mesurées par différents observateurs.

On posera $G = c = 1$ (unités "relativistes").

**ATTENTION : dans l'écriture des équations des geodésiques données dans mon cours, page QS8, deux petites erreurs se sont subrepticement introduites lorsque j'ai recopié les formules sur le transparent .... Nous allons donc commencer par redéterminerer explicitement lesdites équations des geodésiques.**

Etant donnée la symétrie sphérique, les mouvements libres ont lieu dans un plan, c'est-à-dire qu'on ne perd aucune généralité à étudier le cas $\theta = \pi/2$. Ce que nous ferons dans la suite.

### A - Equations des geodésiques

A1 - Que devient la métrique quand $\theta = \pi/2$ ? Comment s'écrit alors le lagrangien $\mathcal{L}$ associé ?

A2 - Montrer que les deux grandeurs suivantes

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}$$

sont conservées le long de toute geodésique.

A3 - Déterminer l'équation obtenue à partir de l'équation de Lagrange relative à la coordonnée $r$.

A4 - Exprimer la relation de normalisation de la quadrivitesse.

(Rque : dans la partie B, on pourra n'utiliser que les équations obtenues en A3 et A4.)

### B - Périodes de révolution dans le cas d'orbites circulaires

On considèrera une orbite circulaire de rayon coordonnée $r$. On désire connaitre la période du mouvement telle que mesurée sur les horloges propres de différents observateurs. On travaille dans le système de coordonnées défini par la métrique (2), et la notion de "repos" est donc relative à ce système de coordonnées.



B1 - Calculer $T_{pl}$, la période mesurée par un observateur sur la planète (c'est-à-dire se déplaçant avec elle).

B2 - Considérons maintenant un observateur au repos à grande distance du systéme (idéalement situé à l'infini).

B2a - Comment s'écrit le temps propre $\tau_\infty$ pour un tel observateur en fonction des grandeurs coordonnées ?

B2b - Calculer $T_\infty$, la période de la planète mesurée par cet observateur.

B3 - Considérons maintenant un observateur au repos situé en un point de l'orbite.

B3a - Comment s'écrit le temps propre $\tau_r$ pour un tel observateur en fonction des grandeurs coordonnées ?

B3b - Calculer $T_r$, la période de la planète mesurée par cet observateur.

B4 - Comparer ces trois périodes de révolution. Que pouvez-vous dire quand $r >> m$ ? Interprétez.