Examen GRAVITATION
Philippe Bendjoya
17/04/2008

On va étudier la stabilité des points de Lagrange dans le cas du P3CCR. on note (x_0, y_0) la position d'un point d'équilibre et on considère un petit déplacement (X, Y) par rapport à ce point de telle sorte que $x = x_0 + X$, $y = y_0 + Y$

1) Montrer que :

$$\begin{aligned}
\ddot{X} - 2n\dot{Y} &\simeq X\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_0 + Y\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}\right)_0 \\
\ddot{Y} + 2n\dot{X} &\simeq X\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}\right)_0 + Y\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_0
\end{aligned}$$

où $U = \dfrac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + \dfrac{\mu 1}{r_1} + \dfrac{\mu_2}{r_2}$

2) justifiez.

On pose $U_{xx} = \left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_0$, $U_{yy} = \left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_0$, $U_{xy} = \left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}\right)_0$ et $\vec{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix}$

3) Mettre les équations précédentes sous la forme matricielle : $\dot{\vec{X}} = A\vec{X}$. Expliciter A

4) Ecrire le polynome caractéristique permettant de trouver les valeurs propres.

5) Exprimer les valeurs propres λ_1, λ_2,λ_3, λ_4

On peut alors écrire

$$X = \sum_{j=1}^{4} \overline{\alpha}_j e^{\lambda_j t} \qquad \dot{X} = \sum_{j=1}^{4} \overline{\alpha}_j \lambda_j e^{\lambda_j t}$$

de même

$$Y = \sum_{j=1}^{4} \overline{\beta}_j e^{\lambda_j t} \qquad \dot{Y} = \sum_{j=1}^{4} \overline{\beta}_j \lambda_j e^{\lambda_j t}$$

$\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$ désignent des quantités à priori complexes.

6) Pourquoi nécessairement les $\overline{\beta}_j$ sont fonctions des $\overline{\alpha}_j$?

7) Trouver la relation entre $\overline{\beta}_j$ et $\overline{\alpha}_j$

8) Si à $t = 0$ $X = X_0$, $\dot{X} = \dot{X}_0$,$Y = Y_0$, $\dot{Y} = \dot{Y}_0$. Ecrire les équations qui permettent de trouver les $\overline{\alpha}_j$

On introduit les quantités :

$$\begin{aligned}
\overline{A} &= \frac{\mu_1}{(r_1^3)_0} + \frac{\mu_2}{(r_2^3)_0} \\
\overline{B} &= 3\left(\frac{\mu_1}{(r_1^5)_0} + \frac{\mu_2}{(r_2^5)_0}\right) y_0^2 \\
\overline{C} &= 3\left(\mu_1 \frac{(x_0 + \mu_2)}{(r_1^5)_0} + \mu_2 \frac{(x_0 - \mu_1)}{(r_2^5)_0}\right) y_0 \\
\overline{D} &= 3\left(\mu_1 \frac{(x_0 + \mu_2)^2}{(r_1^5)_0} + \mu_2 \frac{(x_0 - \mu_1)^2}{(r_2^5)_0}\right)
\end{aligned}$$

9) Montrer que

$$\begin{aligned}
U_{xx} &= 1 - \overline{A} + \overline{D} \\
U_{yy} &= 1 - \overline{A} + \overline{B} \\
U_{xy} &= \overline{C}
\end{aligned}$$

Toutes ces quantités ainsi que X, Y, $\dot{X}$ et $\dot{Y}$ sont des quatnités réelles bien que λ_j et $\overline{\alpha}_j$ peuvent être complexes.

Stabilité des points de Lagrange colinéaires : L_1,L_2,L_3

Pour ces points on a $y_0 = 0$,$(r_1^2)_0 = (x_0 + \mu_2)^2$ et $(r_2^2)_0 = (x_0 - \mu_1)^2$
10) Réexprimer U_{xx},U_{xy}, U_{yy} et l'equation caractéristique (pour la détermination des valeurs propres) en fonction de $\overline{A}$
11) Montrer que $\lambda_1 = -\lambda_2$ et $\lambda_3 = -\lambda_4$.
12) Justfiez que la condition de stabilité est que λ_j doivent être imaginaires purs. Ceci se taduit par $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 < 0$ et $\lambda_3^2 = \lambda_4^2 < 0$.
13) En déduire qu'on a stabilité si $(1 - \overline{A})(1 + 2\overline{A}) > 0$.
14) Montrer qu'étant donné les expressions de r_1 et r_2 et le fait que $\mu_2 < 1/2$ cette conditon ne peut être remplie et donc que les points L_1,L_2,L_3 sont instables.

Stabilité des points de Lagrange triangulaires : L_4,L_5

Pour ces points on a $x_0 = 1/2 - \mu_2$, $y_0 = \pm\sqrt{3}/2$,$(r_1)_0 = (r_2^2)_0 = 1$
15) Exprimer U_{xx},U_{xy}, U_{yy} et l'equation caractéristique.

16) Montrer que le valeurs propres sont purement imaiginaires si $\mu_2 \leq \dfrac{27 - \sqrt{621}}{54} \simeq 0.0385$

17) montrer qu on peut alors écrire $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-1 + \frac{27}{4}\mu_2}$ et $\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{-\frac{27}{4}\mu_2}$. Quel type de movement va-t-on avoir autour des points de Lagrange triangulaires ?