EXAMEN

Module : **Etude Qualitative des Equations Différentielles.**

Durée : 3 heures.

Le sujet est constitué de 3 Exercices totalement indépendants.

Ex. 1 : L'exercice est composé de deux parties indépendantes.

I- On considère l'équation $\ddot{x} + x - x^3 = 0$.

1) Quelle est la structure particulière de cette équation différentielle ? En déduire une intégrale première F (non constante) pour cette équation à l'aide d'une fonction $V(x)$.

2) Représenter la fonction V. Pour les solutions associées aux données initiales suivantes, calculer F et en déduire les comportements des solutions :

(i) $(x,\dot{x})(0) = (0, \frac{1}{2})$; *(ii)* $(x,\dot{x})(0) = (-2, 2)$; *(iii)* $(x,\dot{x})(0) = (-2, 3)$.

3) Ecrire cette équation sous forme d'un système d'ordre 1. Représenter rapidement le portrait de phase associé. Donner simplement, à l'aide de la fonction V, la nature des points stationnaires de cette équation.

4) Hachurer sur le portrait de phase la zone de données initiales pour lesquelles la solution est périodique. A quoi correspondent les courbes qui délimitent cette zone vis-à-vis des points $(-1, 0)$ et $(1, 0)$?

II- On considère l'équation dépendant d'un petit paramètre $\varepsilon \in \mathbb{R}$

$$(*) \qquad \ddot{x} + \frac{\varepsilon}{3}\left(4\,\dot{x}^3 - 3\dot{x}\right) + x - \varepsilon x^3 = 0.$$

1) Donner un intégrale première E_ε associée à l'équation

$$\ddot{x} + x - \varepsilon x^3 = 0.$$

2) On cherche une solution périodique x_ε de $(*)$, de période T_ε. Les solutions de l'équation différentielle quand $\varepsilon = 0$ étant les $A\cos(t) + B\sin(t)$, avec A et B constants, il est naturel de chercher $x_\varepsilon(t) \simeq a\cos(t)$, avec $a \neq 0$, de sorte que la période T_ε de x_ε sera approximativement 2π. On suppose que $x_\varepsilon(t)$ est effectivement solution périodique de $(*)$.

a) Que vaut alors $E_\varepsilon(T_\varepsilon) - E_\varepsilon(0)$? En utilisant $(*)$, exprimer ensuite $\frac{d}{dt}\big(E_\varepsilon(x_\varepsilon, \dot{x}_\varepsilon)\big)$ à l'aide de $\dot{x}_\varepsilon$.

b) En déduire que

$$\int_0^{T_\varepsilon} \left(4\,\dot{x}_\varepsilon^4 - 3\,\dot{x}_\varepsilon^2\right) dt = 0.$$

En utilisant $x_\varepsilon(t) = a\cos(t) + \mathcal{O}(\varepsilon)$ et $T_\varepsilon = 2\pi + \mathcal{O}(\varepsilon)$, en déduire les valeurs possibles de a. On donne

$$\sin^2(t) = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2t)\big), \qquad \sin^4(t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{8}\cos(4t).$$

3) On suppose dans la suite ε fixé petit, et qu'une telle solution x_ε de $(*)$ existe, de période $T_\varepsilon \simeq 2\pi$, telle que $x_\varepsilon(t) = \cos(t) + \mathcal{O}(\varepsilon)$.

a) Ecrire l'équation linéarisée autour de x_ε (poser $x = x_\varepsilon + X$, injecter dans $(*)$ et ne garder que les termes linéaires en X). La mettre sous la forme d'un système du premier ordre en $(X, Y) = (X, \dot{X})$, de matrice $A_\varepsilon(t)$.

b) Exprimer le développement à l'ordre ε de $\displaystyle\int_0^{T_\varepsilon} \mathrm{Tr}\big(A_\varepsilon(t)\big)\, dt$.

c) Déterminer la stabilité de la solution x_ε.

Ex. 2 : On envisage le système d'équations différentielles $\begin{cases} \dot{x} = & x^2(y-1) \\ \dot{y} = & 4y^2(1-x) \end{cases}$.

1) Quels sont les points stationnaires de ce système ? Déterminer les linéarisés correspondants. Que peut-on dire à ce stade de la stabilité de ces points stationnaires ? Esquisser le portrait de phase, et tracer quelques orbites représentatives.

2) Le système est-il Hamiltonien ? Déterminer une intégrale première F de ce système, en précisant soigneusement là où elle est définie.

3) Vérifier que le point $(1,1)$ est un point critique pour F (*i.e.* $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ en $(1,1)$). Déterminer la matrice Hessienne de F au point $(1,1)$. Caractériser le point $(1,1)$ en terme d'extremum pour F. En déduire que les solutions partant près de $(1,1)$ sont périodiques. Préciser l'allure des orbites près de $(1,1)$ (au premier ordre).

Question bonus : A votre avis, étant donné une telle solution périodique ϕ, quels peuvent être les modules des multiplicateurs de Floquet (ou le signe des parties réelles des exposants de Floquet) associés à l'équation linéarisée autour de ϕ ? Il n'est pas nécessaire de faire de calculs pour répondre.

Ex. 3 : On considère l'opérateur sur $[-1,1]$ $\quad \mathcal{L}(u) = (1-x^2)u''(x) - xu'(x)$.

1) Ecrire $\mathcal{L}$ sous forme d'un opérateur de Sturm-Liouville. On précisera les fonctions p, q et ω. S'agit-il d'un problème régulier ?

2) On suppose $u \in \mathcal{C}^2([-1,1], \mathbb{R})$ non nulle et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\mathcal{L}(u) = \lambda u$. Soit, pour $\theta \in [0,\pi]$, $v(\theta) \equiv u\big(\cos(\theta)\big)$.

a) Justifier que $v \in \mathcal{C}^2([0,\pi], \mathbb{R})$, et $\dfrac{dv}{d\theta}(0) = \dfrac{dv}{d\theta}(\pi) = 0$.

b) Calculer $\dfrac{d^2v}{d\theta^2}$. Multiplier alors par v et intégrer par parties : quel est le signe de λ ? En déduire les valeurs possibles λ_n de λ en fonction d'un entier $n \in \mathbb{N}$ et les fonctions v_n correspondantes.

3) *a)* On travaille dans $L^2_\omega(]-1,1[)$, où $\omega(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Vérifier que les fonctions $\varphi_n(x) : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définies par $\varphi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cos(n\theta)$, avec $\cos(\theta) = x$ sont orthonormées dans $L^2_\omega(]-1,1[)$ (on utilisera le changement de variable $x = \cos(\theta)$).

b) En admettant que la fonction $\varphi_n \in \mathcal{C}^2([-1,1], \mathbb{R})$ est un polynôme de degré n, justifier que la famille (φ_n) est une base Hilbertienne de $L^2_\omega(]-1,1[)$. Déterminer alors toutes les valeurs propres de $\mathcal{L}$.

Les fonctions φ_n sont appelés les polynômes de Tchebycheff.