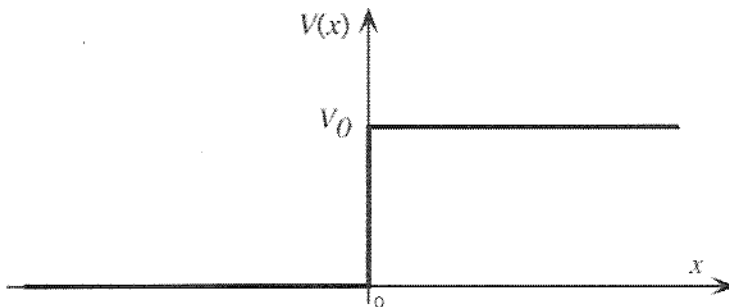


EXAMEN DE PHYSIQUE QUANTIQUE DU 27 AVRIL 2010

**Enrichissement isotopique par réflexion sur une barrière de potentiel**

Une source située en  $x = -\infty$  envoie vers la marche représentée ci-dessous un mélange isotopique dont toutes les particules ont la même vitesse. On utilise la marche pour modifier la composition isotopique du faisceau réfléchi :



1) Expliquer sans calcul pourquoi il est nécessaire d'utiliser des particules d'énergie  $E > V_0$ .

2) Dans la suite, on supposera  $E > V_0$ . La fonction d'onde de l'état d'énergie  $E$  s'écrit :

$$\psi(x) = A \exp(ikx) + B \exp(-ikx) \text{ si } x < 0$$

$$\psi(x) = C \exp(iKx) + D \exp(-iKx) \text{ si } x > 0$$

Ecrire la relation entre  $k$ ,  $K$ ,  $E$  et  $V_0$  pour une particule de masse  $M$ .

3) A l'aide d'arguments physiques, préciser ce que vaut  $D$ . Exprimer  $B$  et  $C$  en fonction de  $A$ . Ecrire le courant de probabilité  $j(x)$  défini dans chaque région par :

$$j(x) = \frac{\hbar}{2iM} \left[ \psi^*(x) \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} - \psi(x) \frac{\partial \psi^*(x)}{\partial x} \right]$$

On appellera respectivement  $j_i$ , le courant incident issu de la source,  $j_r$  le courant réfléchi et  $j_t$  le courant transmis.

4) Dédire de ce qui précède le coefficient de réflexion  $R = j_r/j_i$  et le coefficient de transmission  $T = j_t/j_i$  et les exprimer en fonction du rapport  $V_0/E$ . Quelle relation lie  $R$  et  $T$ ? Que vaut  $R$  si  $E = V_0$ ? Donner l'expression simplifiée de  $R$  quand  $E \gg V_0$ . Tracer le graphe de  $R$  en fonction du rapport  $V_0/E$ . En déduire l'allure de celui de  $T$ .

5) Le mélange incident contient des proportions  $c_1$  et  $1 - c_1$  de particules de masses respectives  $M_1$  et  $M_2$  avec  $M_1 < M_2$ . Donner l'inégalité entre les deux coefficients de réflexion  $R_1$  et  $R_2$ . Exprimer la concentration  $c'_1$  du mélange réfléchi en fonction de  $c_1$ ,  $R_1$  et  $R_2$ . Calculer numériquement le taux d'enrichissement en particules légères pour un mélange hydrogène-deutérium de très grande énergie par rapport à  $V_0$  en adoptant  $c_1 = 0.81$ .

Défaut quantique des niveaux très excités du sodium

On veut calculer les niveaux d'énergie de certains états très excités (dits niveaux de Rydberg) du sodium. L'étude spectroscopique des niveaux très excités ( $n \gg 1$ ) des alcalins a permis à Rydberg d'établir expérimentalement que l'énergie de ces niveaux est de la forme :

$$E_{n,l} = -\frac{E_I}{(n - \delta_l)^2} \quad (1)$$

où  $E_I = \hbar^2/(2m_e a_0^2)$  et  $\delta_l$  est un nombre, appelé *défaut quantique*, qui, en première approximation ne dépend que de  $l$  et est inférieur à 1 ou de l'ordre de 1. On peut alors supposer que l'hamiltonien d'un tel atome peut s'écrire comme celui de l'atome d'hydrogène auquel on rajoute un hamiltonien de perturbation (une correction) qui permette de prendre en compte les différences entre l'atome d'hydrogène et l'atome de sodium.

Le but de ce problème est d'étudier parmi divers hamiltoniens de perturbation possibles, celui qui permet d'interpréter au mieux les résultats expérimentaux sur  $\delta_l$ . On considère que l'atome alcalin est constitué d'un cœur, formé du noyau et des électrons internes, de charge globale  $+q_e$  et dont le rayon est de l'ordre du rayon de Bohr  $a_0$ , et d'un électron externe de charge  $-q_e$ . L'hamiltonien décrivant la dynamique de l'électron externe est supposé de la forme :

$$H = H_0 + H'$$

où

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

est l'hamiltonien *non perturbé* de l'atome d'hydrogène et où  $H'$  est l'hamiltonien de *perturbation*, i.e. une petite correction supposée de la forme

$$H' = -\frac{B_p q_e^2}{4\pi\epsilon_0 r^p}$$

où  $p$  est un entier supérieur ou égal à 2 et  $B_p$  une constante mesurant la force de l'interaction non coulombienne.

1) Dire pourquoi  $H'$  commute avec le moment angulaire orbital  $\vec{L}$ . En déduire que les éléments de matrice de  $H'$  sont de la forme :

$$\langle nlm|H'|n'l'm'\rangle = H'_{nl} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

où les  $|nlm\rangle$  sont les états propres de l'atome d'hydrogène.

*Suggestion* : on tirera profit de l'action des opérateurs  $\vec{L}^2$ ,  $L_\pm$  et  $L_z$ .

2) Retrouver ce résultat en exprimant l'élément de matrice  $\langle nlm|H'|n'l'm'\rangle$  en termes des fonctions propres de l'atome d'hydrogène écrites comme produits de fonctions d'onde radiale et angulaire.

3) Déduire des questions précédentes que tous les sous-niveaux d'un niveau  $n$  associés à un nombre quantique orbital  $l$  sont déplacés (par rapport au niveau non perturbé de l'atome d'hydrogène) d'une même quantité notée  $\Delta E_{n,l}$  qui ne dépend que de  $n$  et de  $l$ .

*Rappel* : La théorie des perturbations stationnaires permet de déduire les corrections aux valeurs propres en diagonalisant la restriction de l'hamiltonien de perturbation  $H'$  au sous-espace de Hilbert associé à une valeur propre particulière de l'hamiltonien non perturbé  $H_0$ .

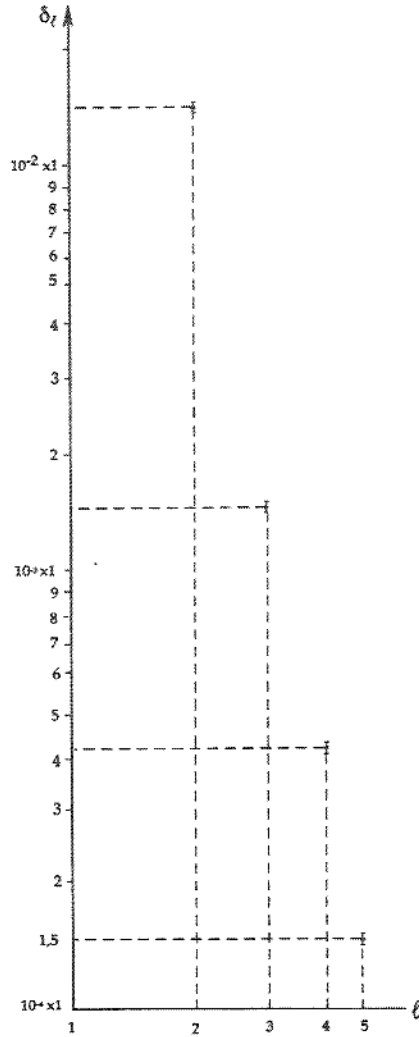
4) Exprimer  $\Delta E_{n,l}$  en fonction de  $n$ ,  $l$ ,  $B_p$ ,  $q_e^2/4\pi\epsilon_0$  et  $a_0$  dans les cas où  $p = 2, 3$  et  $4$ .

On donne les valeurs moyennes :

$$\begin{aligned} \langle nlm|\frac{1}{r^2}|nlm\rangle &= \frac{2}{(2l+1)n^3 a_0^2} \quad , \\ \langle nlm|\frac{1}{r^3}|nlm\rangle &= \frac{2}{l(l+1)(2l+1)n^3 a_0^3} \quad , \\ \langle nlm|\frac{1}{r^4}|nlm\rangle &= \frac{4}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)n^3 a_0^4} \left[ \frac{3}{l(l+1)} - \frac{1}{n^2} \right] \quad . \end{aligned}$$

5) En déduire les valeurs théoriques du défaut quantique  $\delta_l$  pour  $p = 2, 3$  et  $4$  en supposant qu'il est légitime d'effectuer un développement limité de l'expression (1) au premier ordre en  $\delta_l$  lorsque  $n \gg l$ . Montrer que, dans la limite  $n \gg l \gg 1$ ,  $\delta_l$  est de la forme  $b_p/l^\gamma$  où  $b_p$  est une constante dépendant de  $p$ . Que vaut l'exposant  $\gamma$  pour  $p = 2, 3$  et  $4$ ?

6) Les défauts quantiques, obtenus expérimentalement, des niveaux d, f, g et h ( $l = 2, 3, 4$  et  $5$ ) du sodium sont portés en fonction de  $l$  sur la figure ci-jointe (noter les échelles logarithmiques sur les deux axes). Avec quelle valeur de  $p$  ces données expérimentales s'accordent-elles le mieux ? (*Suggestion* : utiliser  $\ln \delta_l = -\gamma \ln l + \ln b_p$ )



Valeur expérimentale de  $\delta_l$  en fonction de  $l$  en coordonnées log-log. Si cela est nécessaire, on utilisera la valeur obtenue pour  $l = 5$  ( $\delta_5 = 1,5 \cdot 10^{-4}$ ) comme calibration.