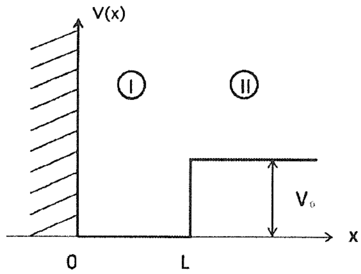
PARTIEL 2 MQ Legrand, 19/03/10

19 mars 2010

L3 Physique. Interrogation écrite de physique quantique n° 2

Puits asymétrique

On se propose d'étudier les niveaux d'énergie d'une particule placée dans un puits de potentiel $V(x)$ asymétrique, comme montré sur la figure ($V(x) = +\infty$ pour $x < 0$, $V(x) = 0$ si $0 \leq x \leq L$ et $V(x) = V_0$ si $x > L$).



1. On s'intéresse à un état propre du Hamiltonien d'énergie $E > 0$. Donner l'expression de la fonction d'onde $\psi(x)$ dans les régions I) et II) (pour la région II on pourra distinguer deux cas : $E > V_0$ et $E < V_0$).

2. Nous considérons d'abord le cas d'un état lié.
a) Quelle condition doit vérifier son énergie E pour qu'un état soit lié ?
b) Quelles sont les conditions que doit vérifier sa fonction d'onde en $x = 0$ et $x \to +\infty$? Simplifier alors les expressions de la question 1 et en déduire que la fonction d'onde peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \psi(x) &= A \sin kx \quad \text{si} \quad 0 < x < L \\ \psi(x) &= B \exp(-\kappa x) \quad \text{si} \quad x > L\,, \end{aligned}$$

où $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ et $\kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$.
c) Montrer que, malgré la discontinuité de V en $x = L$, la fonction d'onde ψ et sa dérivée $\frac{d\psi}{dx}$ sont continues.
d) Ecrire les conditions de raccordement de la fonction d'onde en $x = L$. En déduire que l'équation de quantification de l'énergie peut s'écrire :

$$\operatorname{cotan} kL = -\frac{\sqrt{(2mL^2V_0)/\hbar^2 - (kL)^2}}{kL}\,.$$

e) **(hors barème)** Tracer qualitativement les solutions graphiques de cette équation et montrer qu'aucun état lié n'existe pour des valeurs de V_0 inférieures à un seuil que l'on précisera.

3. On revient au cas d'un état de diffusion (non lié).
a) Quelle forme prend, dans ce cas, la fonction d'onde dans la région II (la forme de la fonction d'onde dans la zone I reste la même que pour un état lié) ?
b) Ecrire les conditions de raccordement en $x = L$. L'énergie est elle encore quantifiée ?

Théorème du Viriel

On considère un système unidimensionnel de hamiltonien

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(X)$$

où $V(X) = \lambda X^n$.

1. Calculer le commutateur $[H, XP]$ (*rappel :* $[X, P] = i\hbar$).

2. En prenant la valeur moyenne de ce commutateur, montrer qu'on a, pour tout état propre $|\varphi\rangle$ de H, la relation :

$$2\langle\varphi|T|\varphi\rangle = n\langle\varphi|V|\varphi\rangle$$

où $T = P^2/2m$ est l'opérateur énergie cinétique.