18 février 2011

L3 Physique. Interrogation écrite de physique quantique n° 1

Mesure et évolution temporelle

Problème I On suppose que l'évolution du vecteur d'état d'un système quantique est régie par l'équation de Schrödinger où le hamiltonien H ne dépend pas du temps. Dans une base orthonormée $\{|\,1\rangle\,, |\,2\rangle\,, |\,3\rangle\}$, le hamiltonien a pour matrice représentative :

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

I.1. Calculer les valeurs propres de H et préciser leur degré de dégénérescence. Exprimer la base des états propres $\{|\,\phi_0\rangle\,, |\,\phi_+\rangle\,, |\,\phi_-\rangle\}$ de H dans la base $\{|\,1\rangle\,, |\,2\rangle\,, |\,3\rangle\}$ (pour l'identification des vecteurs, on prendra les vecteurs $|\,\phi_+\rangle\,, |\,\phi_-\rangle$ orthogonaux à $|\,1\rangle$).

I.2. On suppose que le système est initialement dans l'état : $|\,\psi(0)\rangle = |\,2\rangle$.
Calculer l'expression de $|\,\psi(t)\rangle$ dans la base $\{|\,\phi_0\rangle\,, |\,\phi_+\rangle\,, |\,\phi_-\rangle\}$ des états propres de H, puis dans la base initiale $\{|\,1\rangle\,, |\,2\rangle\,, |\,3\rangle\}$.
b) Quelle est la probabilité $P_3(t)$ pour que le système soit dans l'état $|\,3\rangle$ au temps t ?

I.3. On suppose maintenant que le système est initialement dans l'état : $|\,\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|\,1\rangle + |\,2\rangle)$.
a) Calculer $|\,\psi(t)\rangle$ dans la base $\{|\,1\rangle\,, |\,2\rangle\,, |\,3\rangle\}$.
b) A $t = t_0$ on mesure l'énergie et l'on trouve $-\hbar\omega$. Avec quelle probabilité ? Que vaut $|\,\psi(t)\rangle$ pour $t > t_0$?

Problème II Un premier appareil de Stern-Gerlach dont le gradient de B_z est vertical, parallèle à Oz, sélectionne des spins 1/2 dans l'état $|+\rangle$ (on note $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ la base des vecteurs propres de σ_z). Ces spins sont ensuite soumis à un champ magnétique horizontal parallèle à Ox, $\vec{B}_0 = B_0\hat{x}$, constant et uniforme, et les spins sont enfin analysés par un second appareil de Stern-Gerlach identique au premier.
Si $\vec{\mu} = \gamma\hbar\vec{\sigma}/2$ est le moment magnétique associé au spin 1/2, le hamiltonien des spins dans la région d'espace où règne le champ $\vec{B}_0$, s'écrit $H = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}_0$. On posera $\omega_0 = \gamma B_0$.

II.1 Si les spins passent un intervalle de temps t dans la région d'espace où règne le champ $\vec{B}_0$, sachant que leur état initial est $|\varphi(t=0)\rangle = |+\rangle$, montrer que leur état $|\varphi(t)\rangle$ au temps t est

$$|\varphi(t)\rangle = \exp\left(\mathrm{i}\frac{\omega_0 t}{2}\,\sigma_x\right)|+\rangle = U(t)|+\rangle$$

II.2 Montrer que, pour n entier, on a $\sigma_x^{2n} = I$ et $\sigma_x^{2n+1} = \sigma_x$.
En déduire l'expression explicite de $U(t)$ et donner sa forme matricielle dans la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$.

II.3 Quelle est la probabilité p_+ (p_-) pour que le spin soit trouvé dans l'état $|+\rangle$ ($|-\rangle$) à la sortie du second appareil de Stern-Gerlach ? Vérifier que $\mathsf{p}_+ + \mathsf{p}_- = 1$.

Rappel : $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$.