Partiel 1 MQ    Legrand, 26/02/10

26 février 2010

# L3 Physique. Interrogation écrite de physique quantique n° 1

## A. Mesures quantiques

On considère une base orthonormée $\{|\,1\rangle\,,|\,2\rangle\,,|\,3\rangle\}$ où le hamiltonien $H$ et une grandeur physique $A$ sont représentés par les matrices :

$$H = E_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

où $E_0$ et $a$ sont des constantes positives.

**1.** a) On procède à une mesure de l'énergie. Quels résultats peut-on obtenir ? $0,\ E_0,\ -E_0$
b) Diagonaliser $A$.
c) On procède à une mesure de la grandeur $A$. Quels résultats peut-on obtenir ? $a$ (2x), $-a$

**2.** On prépare le système dans l'état : $|\,\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(|\,1\rangle + |\,2\rangle + |\,3\rangle)$.
a) Quelle est la probabilité pour qu'une mesure de l'énergie donne 0 ? 1/3
b) Si le résultat d'une telle mesure est effectivement 0, quel est l'état du système après la mesure ?
c) Quel(s) résultat(s) donnerait *alors* une mesure de $A$ ? Avec quelle(s) probabilité(s) ?

**3.** a) Quelle est la probabilité pour que l'énergie mesurée soit $+E_0$ si le système est initialement dans l'état $|\,\psi\rangle$ ? Quel est l'état du système après la mesure ?
b) Quels sont *alors* les résultats possibles d'une mesure de $A$ ? Quelles sont les probabilités associées ?
c) On suppose que la mesure de $A$ donne $-a$. Quel est l'état du système après la mesure ?

**4.** On effectue un grand nombre de mesures de l'énergie sur un grand nombre de systèmes identiques tous préparés dans l'état $|\,\psi\rangle$. Quelle en est la moyenne ?

## B. Mesure et évolution temporelle

L'évolution du vecteur d'état d'un système quantique est régie par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\,|\,\psi(t)\rangle = H\,|\,\psi(t)\rangle\ . \tag{2}$$

où le hamiltonien $H$ ne dépend pas du temps et possède une base d'états propres $\{|\,\phi_n\rangle\}$, i.e. $H\,|\,\phi_n\rangle = E_n\,|\,\phi_n\rangle$, où l'on suppose que les énergies propres $E_n$ sont non dégénérées.

**1.** On décompose le vecteur d'état dans cette base : $|\,\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t)\,|\,\phi_n\rangle$.
Trouver l'équation différentielle que doit vérifier chaque coefficient $c_n(t)$ et la résoudre.

**2.** Dans une base orthonormée $\{|\,1\rangle\,,|\,2\rangle\,,|\,3\rangle\}$, le hamiltonien a pour matrice représentative :

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

a) On suppose que le système est initialement dans l'état : $|\,\psi(0)\rangle = |\,2\rangle$.
Calculer l'expression de $|\,\psi(t)\rangle$ dans la base $\{|\,\phi_0\rangle\,,|\,\phi_+\rangle\,,|\,\phi_-\rangle\}$ des états propres de $H$, puis dans la base initiale $\{|\,1\rangle\,,|\,2\rangle\,,|\,3\rangle\}$.
b) Quelle est la probabilité $P_2(t)$ pour que le système soit dans l'état $|\,2\rangle$ au temps $t$ ?

**3.** On suppose maintenant que le système est initialement dans l'état : $|\,\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|\,1\rangle + |\,2\rangle)$.
a) Calculer $|\,\psi(t)\rangle$ dans la base $\{|\,1\rangle\,,|\,2\rangle\,,|\,3\rangle\}$.
b) A $t = t_0$ on mesure l'énergie et l'on trouve $+\hbar\omega$. Avec quelle probabilité ? Que vaut $|\,\psi(t)\rangle$ pour $t > t_0$ ?