17 Avril 2012

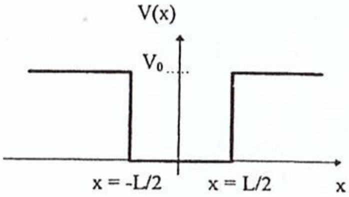
L3 Physique - Contrôle terminal de physique quantique

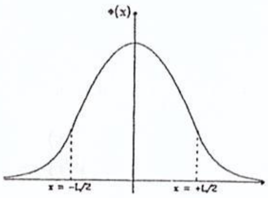
Informations utiles

$m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg, $\hbar = 1.055 \times 10^{-34}$ J.s

Puits de potentiel 1-D

Dans ce problème, on considère une particule quantique de masse m dans un potentiel $V(x)$ à une dimension.
On s'intéresse aux états liés d'un puits de potentiel fini, c'est-à-dire tel que $V(x < -L/2) = V(x > +L/2) = V_0$ et $V(-L/2 < x < +L/2) = 0$ (voir figure). On donne ci-dessous l'allure de la fonction d'onde $\phi_F(x)$ du fondamental.





1. Résoudre l'équation de Schrödinger pour $x < -L/2$ et $x > +L/2$ et justifier l'allure de $\phi_F(x)$ dans ces deux régions de l'espace.

2.a Quelles sont les conditions aux limites en $x = -L/2$ et $x = +L/2$?

2.b Pour $-L/2 < x < +L/2$, montrer que la fonction d'onde du fondamental peut s'écrire :

$$\phi_F(x) = A\cos(kx)$$

avec $E_F = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$. Écrire l'équation qui permet de déterminer k. Sans chercher à résoudre cette dernière, à l'aide de la figure représentant l'allure de $\phi_F(x)$, prévoir si l'énergie E_F est plus faible ou plus forte que celle du fondamental d'un puits infini de même largeur. *Suggestion* : on comparera les valeurs de k dans les deux cas.

2.c (*question bonus indépendante*) On suppose que $V_0 - E_F = 0,4$ eV. On définit $\kappa^2 = 2m\,(V_0 - E_F)/\hbar^2$. Quelle est la dimension de κ ? Evaluer numériquement la largeur typique de la barrière (de hauteur V_0) séparant deux puits identiques successifs pour que ceux-ci présentent un couplage significatif par effet tunnel (la particule est un électron).

3. Montrer que la condition de raccordement à $x = L/2$ s'écrit

$$\frac{2mV_0}{\hbar^2 k^2} - 1 = \tan^2\frac{kL}{2}$$

Quelle est-la condition pour qu'il y ait un seul état lié ? On se propose d'étudier le cas où $V_0 \to 0$ alors que L reste fixé. Plus précisément la quantité sans dimensions

$$\frac{mV_0L^2}{\hbar^2} \to 0$$

Montrer que dans ces conditions $kL \ll 1$ et que la condition de raccordement devient

$$V_0 - E_F = \frac{mL^2E_F^2}{2\hbar^2}$$

En déduire $V_0 - E_F$ en fonction de V_0 en admettant, ce que l'on vérifiera *a posteriori* sur le résultat, que $(V_0 - E_F) \ll E_F$

Puits de potentiel sphérique.

On traite ici le puits de potentiel sphérique. On utilisera les résultats concernant les potentiels centraux. L'hamiltonien s'écrit :

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r) \; .$$

1. Montrer que l'hamiltonien commute avec $\vec{L}$.

On recherche les solutions de $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ sous la forme de vecteurs propres communs à H, $\vec{L}^2$ et L_z.

2. On rappelle l'expression de l'opérateur Laplacien en coordonnées sphériques :

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r - \frac{1}{r^2}\frac{\vec{L}^2}{\hbar^2}$$

Montrer que l'équation radiale peut alors s'écrire :

$$\left(-\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}r + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2m(V(r)-E)}{\hbar^2}\right)R_\ell(r) = 0\,.$$

3. On suppose que le potentiel est de la forme

$$\begin{aligned} V(r) &= 0 \qquad 0 < r \leq a \\ V(r) &= V_0 \qquad r > a \end{aligned}$$

3.a On pose $u_\ell(r) = rR_\ell(r)$. Ecrire l'équation radiale satisfaite par $u_\ell(r)$ pour $0 < r \leq a$ et $r > a$. Quel est le comportent de $u_\ell(r)$ lorsque $r \to 0$?

3.b On se limite maintenant au cas de l'onde s, $\ell = 0$ dans le cas où $E < V_0$. Ecrire l'équation radiale et montrer que les solutions sont de la forme

$$\begin{aligned} 0 < r \leq a \qquad u_0(r) &= A\sin kr \qquad \text{où} \qquad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \\ r > a \qquad u_0(r) &= B\exp(-\kappa r) \qquad \text{où} \qquad \kappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E) \end{aligned}$$

3.c Quelle est la condition de raccordement à $r = a$? Pour a fixé, quelle est la condition sur V_0 pourqu'il existe au moins un état lié ?

3.d Comment peut-on expliquer que le puits à une dimension ait toujours au moins un état lié à a fixé, quel que soit V_0, alors qu'il faut une valeur minimale de V_0 pour le puits sphérique ?

Le chat de Schrödinger [1]

D'après le principe de superposition, si les vecteurs $|\Phi_a\rangle$ et$|\Phi_b\rangle$ sont deux états possibles pour un système quantique, la superposition quantique $(|\Phi_a\rangle + |\Phi_b\rangle)/\sqrt{2}$ est également un état possible pour ce système. Ce principe est essentiel pour rendre compte des phénomènes d'interférence. Néanmoins, appliqué à de « gros objets », ce principe conduit à des situations paradoxales pour lesquelles un système donné peut se trouver dans une superposition de deux états antinomiques.

Le plus célèbre des paradoxes de ce type est celui du « chat de Schrödinger », superposition d'un état « chat vivant » et d'un état « chat mort ».

1. Adapté de *Problèmes Quantiques*, Jean-Louis Basdevant & Jean Dalibard, Les éditions de l'École Polytechnique (2004).

1. Les états quasi-classiques de l'oscillateur harmonique

On considérera dans ce problème un oscillateur harmonique à une dimension, de masse m et de pulsation ω. Le Hamiltonien s'écrit :

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2$$

On note $\{|n\rangle\}$ la base propre de H :

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

On introduit les opérateurs adimensionnés $\hat{X}$ et $\hat{P}$

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X, \quad \hat{P} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}P$$

ainsi que les opérateurs *annihilation*, *création* et *nombre*

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + \mathrm{i}\hat{P}), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - \mathrm{i}\hat{P}), \quad \hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$$

On rappelle les commutateurs : $[\hat{X}, \hat{P}] = \mathrm{i}\mathbb{I}$, $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \mathbb{I}$ et les relations : $H = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)$, $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$.

1. Préliminaires

a. Vérifier qu'en travaillant avec des fonctions des *variables sans dimension* $\hat{x}$ et $\hat{p}$, la forme différentielle des opérateurs $\hat{X}$ et $\hat{P}$ est donnée par :

$$\hat{P} \to -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\hat{x}}, \quad \hat{X} \to \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\hat{p}}$$

b. Calculer le commutateur $[\hat{N}, \hat{a}]$ et, en l'appliquant à $|n\rangle$, en déduire que

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \tag{1}$$

à un facteur de phase près que l'on oubliera dans la suite.

c. En utilisant (1) pour $n = 0$ et en remplaçant $\hat{a}$ par son expression en termes de $\hat{X}$ et $\hat{P}$, exprimer la fonction d'onde de l'état fondamental $\psi_0(\hat{x})$ ainsi que sa transformée de Fourier $\widetilde{\psi}_0(\hat{p})$. On ne cherchera pas à normaliser les expressions obtenues.

2. Les états quasi-classiques. On étudie maintenant les propriétés des états propres de l'opérateur $\hat{a}$, appelés *états quasi-classiques* (ou *états cohérents*). Soit α un nombre complexe quelconque. Montrer que l'état

$$|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \tag{2}$$

est état propre de $\hat{a}$, de norme unité, et de valeur propre α : $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$

3. Calculer la valeur moyenne de l'énergie dans un état quasi-classique $|\alpha\rangle$. Calculer également les valeurs moyennes $\langle x\rangle \equiv \langle X\rangle_\alpha$ et $\langle p\rangle \equiv \langle P\rangle_\alpha$ ainsi que les dispersions

$$\Delta x \equiv \Delta X_\alpha = \sqrt{\langle X^2\rangle_\alpha - \langle X\rangle_\alpha^2}, \quad \Delta p \equiv \Delta P_\alpha = \sqrt{\langle P^2\rangle_\alpha - \langle P\rangle_\alpha^2}$$

Vérifier que $\Delta x\Delta p = \hbar/2$.

4. D'une manière analogue à celle suivie à la question **1.c**, déterminer la fonction d'onde $\psi_\alpha(\hat{x})$ de l'état quasi-classique $|\alpha\rangle$, ainsi que sa transformée de Fourier $\widetilde{\psi}_\alpha(\hat{p})$. On ne cherchera pas à normaliser les expressions obtenues.

5. On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$, l'oscillateur est dans un état quasi-classique :

$$|\psi(0)\rangle = |\alpha_0\rangle, \quad \text{avec } \alpha_0 = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

où ρ est un nombre réel positif.

a. Montrer qu'à tout instant ultérieur t, l'oscillateur est dans un état (quasi-classique) que l'on peut écrire

$$|\psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2}|\alpha(t)\rangle$$

où $|\alpha(t)\rangle$ est un état quasi-classique ; donner l'expression de $\alpha(t)$ en fonction de ρ, φ, ω et t.

b. Évaluer $\langle X\rangle_{\psi(t)}$ et $\langle P\rangle_{\psi(t)}$. En rapprochant ces résultats de ceux de la question **3**, justifier brièvement l'appellation d'état quasi-classique lorsque $|\alpha| \gg 1$.

6. Application numérique. On considère un pendule simple de longueur 1 mètre et de masse 1 gramme. On suppose que l'état de ce pendule peut se décrire par un état quasi-classique. Ce pendule est écarté de $x_0 = 1\,\mu$m de sa position initiale et il est lâché avec une vitesse moyenne nulle.

a. Quelle est la valeur de $\alpha(0)$ correspondante ?

b. Quelle est l'incertitude relative en position $\Delta x/x_0$?

c. Quelle est la valeur de $\alpha(t)$ après 1/4 de période d'oscillation ?

2. Fabrication d'un état *chat de Schrödinger* (hors barème)

Pendant l'intervalle de temps $[0, T]$, on ajoute au potentiel harmonique le potentiel : $W = \hbar g(\hat{a}^\dagger\hat{a})^2$. On suppose que g est très grand devant ω et que $\omega T \ll 1$. On peut donc restreindre le Hamiltonien du système à W pendant l'intervalle $[0, T]$. À l'instant initial $t = 0$, le système est dans un état quasi-classique $|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle$.

1. Montrer que les états $|n\rangle$ sont états propres de W. Exprimer le développement sur la base $\{|n\rangle\}$ de l'état du système à l'instant T, $|\psi(T)\rangle$.

2. Comment se simplifie $|\psi(T)\rangle$ dans les cas particuliers : $T = 2\pi/g$ et $T = \pi/g$?

3. On choisit maintenant $T = \pi/(2g)$. Montrer que l'on a :

$$|\psi(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}|\alpha\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}|-\alpha\rangle\right) \qquad (1)$$

4. On suppose que α est imaginaire pur : $\alpha = \mathrm{i}\rho$.

a. Décrire qualitativement l'état physique (3).

b. Pour une valeur de $|\alpha|$ de l'ordre de grandeur calculé en **1.6**, pourquoi peut-on considérer que cet état est une réalisation concrète d'un état de type « chat de Schrödinger » évoqué dans l'introduction ?