Examen de physique quantique du 26 mars 2012

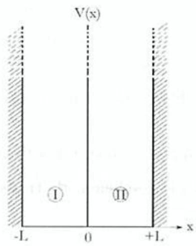
Informations utiles

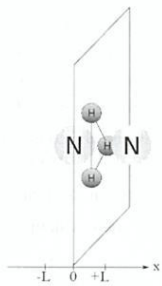
- *Les fonctions impaires vérifient* $f(x) = -f(-x)$ *et par conséquent* $f(0) = 0$;
- *Les fonctions paires vérifient* $f(x) = f(-x)$ *et par conséquent* $f'(x) = -f'(-x)$.
- $[X, P] = i\hbar$

Modélisation de la molécule d'ammoniac par un potentiel delta

On considère le puit de potentiel $V(x)$:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{pour} \quad x < -L \\ a\delta(x) & \text{pour} \quad -L < x < L \\ \infty & \text{pour} \quad x > L \end{cases}$$





Ce potentiel est une schématisation simplifiée du potentiel ressenti par l'atome d'azote dans la molécule d'ammoniac ; le delta de Dirac en $x = 0$ représente le plan formé par les 3 atomes d'hydrogène.

1. Écrire l'équation de Schrodinger stationnaire pour le potentiel considéré ici. Donner les formes générales des solutions $\psi_{I,II}(x)$ pour les zones I et II respectivement.

2. Montrer en intégrant cette équation entre $-\epsilon$ et $+\epsilon$ et en prenant la limite $\epsilon \to 0_+$ que la condition sur le saut de la dérivée de $\psi(x)$ en $x = 0$ s'écrit : $\psi'(0_+) - \psi'(0_-) = \frac{2ma}{\hbar^2}\psi(0)$

3. On utilise la symétrie du puits de potentiel pour séparer l'étude des états liés en solutions paires et impaires.

a) *On considère les solutions impaires.*

i) Montrer par un raisonnement sur les propriétés des fonctions impaires que $\psi'(x)$ est continue en $x = 0$.

ii) En déduire les solutions et les énergies associées. Comparer avec les solutions impaires du puits infini sans barrière de Dirac.

b) *On considère les solutions paires.*

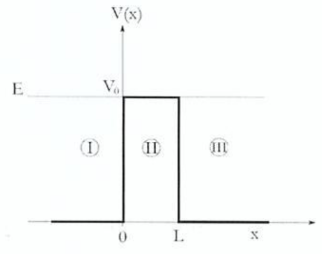
i) Montrer par un raisonnement sur les propriétés des fonctions paires que $\psi'(0_+) = \frac{ma}{\hbar^2}\psi(0)$.

ii) À l'aide des conditions aux limites en $x = L$, montrer que les solutions doivent être de la forme $\psi(x) = A\sin(k(x - L))$.

iii) Déduire de la question i) que la condition de quantification s'écrit ici $\frac{\hbar^2 k}{ma} = -\tan(kL)$. Représenter un exemple de résolution graphique.

4. On considère l'énergie la plus basse des états impairs et la plus basse des états pairs. Quelle est la plus basse des deux ?

Coefficient de transmission d'une barrière de potentiel



On se propose de calculer le coefficient de transmission d'une barrière de potentiel rectangulaire (de largeur L et de hauteur V_0) dans le cas très spécial où $E = V_0$. On notera k le nombre d'onde de la particule incidente par la gauche.

1. Rappeler la forme de la fonction d'onde dans les régions I et III pour une particule incidente venant de $x \to -\infty$ en fonction de r et t (coefficients de reflexion et de transmission des ondes).

2. Montrer que la forme de la fonction d'onde à l'intérieur de la barrière (région II) est : $\psi_{II}(x) = Cx + D$ où C et D sont des nombres complexes.

3. Écrire les différentes conditions de raccordement en $x = 0$ et $x = L$, et obtenir une expression pour le coefficient de transmission $|t|^2$.

4. Montrer qu'on peut retrouver ce résultat à l'aide des courants de probabilité incident et transmis.

5. Pour quelle valeur de kL, le coefficient de transmission est-il égal à $1/2$?

Théorème du Viriel

On considère un système unidimensionnel de hamiltonien

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(X)$$

où $V(X) = \lambda X^n$.

1. Montrer que $[X^2, P] = 2i\hbar X$ puis par récurrence que $[X^n, P] = i\hbar n X^{n-1}$.

2. Calculer alors le commutateur $[H, XP]$.

3. En prenant la valeur moyenne de ce commutateur, montrer qu'on a, pour tout état propre $|\varphi\rangle$ de H, la relation :

$$2\langle\varphi|T|\varphi\rangle = n\langle\varphi|V|\varphi\rangle$$

où $T = P^2/2m$ est l'opérateur énergie cinétique.