17 février 2012

L3 Physique. Interrogation écrite de physique quantique n° 1

Moment magnétique et évolution temporelle

Problème I : Moment magnétique du deutéron

On observe qu'un noyau de deutérium plongé dans un champ magnétique uniforme **B** possède 3 états d'énergie notés $\{|+\rangle, |0\rangle, |-\rangle\}$, d'énergies respectives E_0, 0, $-E_0$ où $E_0 > 0$. On posera $\omega = E_0/\hbar$.
Ce noyau a un moment magnétique. On suppose que l'observable M associée à la projection de ce moment magnétique sur une direction fixe perpendiculaire au champ **B** a la forme $M = \mu_0 A$, avec $\mu_0 > 0$, où A est défini par

$$A\,|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle\,, \qquad A\,|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,[|+\rangle + |-\rangle]\,, \qquad A\,|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle \tag{1}$$

1. Ecrire les matrices représentatives de l'hamiltonien H et de A dans la base orthonormée $\{|+\rangle, |0\rangle, |-\rangle\}$.

2. Calculer les valeurs propres m_1, m_2 et m_3 de M et les vecteurs propres normalisés correspondants $|1\rangle, |2\rangle$ et $|3\rangle$, en ordonnant les valeurs propres $m_1 > m_2 > m_3$.

3. On suppose qu'à l'instant $t = 0$ l'état du noyau est $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer $\langle E\rangle$ et ΔE dans cet état.

4. Calculer, à l'instant t, l'état $|\psi(t)\rangle$ et en déduire la valeur moyenne $\langle M\rangle$ dans ~~dans~~ cet état.

5. Quelles sont les probabilités de trouver m_1, m_2 et m_3 à l'instant t lors d'une mesure de M sur $|\psi(t)\rangle$?

6. Interpréter physiquement cette évolution de la composante du moment magnétique transverse.

Problème II : Précession de Larmor

On considère une particule de spin 1/2 plongée dans un champ magnétique $\vec{B}_0 = B_0\hat{z}$ homogène et uniforme. On note $\vec{S}$ l'opérateur de spin de la particule et $\vec{\mu} = \gamma\vec{S}$ l'opérateur moment magnétique associé. On supposera que le hamiltonien dans la région d'espace où règne le champ $\vec{B}_0$, s'écrit $H = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}_0$. On posera $\omega_0 = -\gamma B_0$.

1. (a) Démontrer le théorème d'Ehrenfest pour un opérateur hermitien ne dépendant pas explicitement du temps :

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle A\rangle = \langle [A, H]\rangle\,. \tag{1}$$

(b) Via ce théorème, déterminer les équations d'évolution des trois composantes $\langle S_i\rangle$, $i = x, y, z$.

2. Déduire de la question précédente que le mouvement de $\left\langle \vec{S}\right\rangle$ est un mouvement de précession. Quel est sa période T_0 ?

3. On décompose l'état $|\psi(t)\rangle$ du spin sur la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ des vecteurs propre de S_z associés respectivement aux valeurs propres $+\hbar/2$, $-\hbar/2$:

$$|\psi(t)\rangle = \alpha(t)\,|+\rangle + \beta(t)\,|-\rangle\,. \tag{2}$$

(a) Donner l'évolution des coefficients $\alpha(t)$ et $\beta(t)$

(b) Comparer le vecteur d'état $|\psi(T_0)\rangle$ au bout d'une période T_0 et le vecteur d'état initial $|\psi(0)\rangle$.

Rappel : On utilisera $[S_x, S_z] = -i\hbar S_y$ et $[S_y, S_z] = i\hbar S_x$.