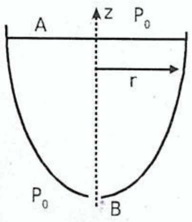
LICENCE DE PHYSIQUE L3 SEMESTRE 2 : MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Contrôle Continu du Jeudi 11 Avril 2012
Durée : 1h 30

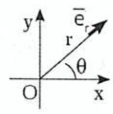


<u>Exercice 1</u> : Horloge à eau ou Clepsydre

La mesure du temps qui s'écoule a constitué un défi à toutes les époques. Un des moyens utilisés par les anciens, dès 1500 av. J.C. chez les égyptiens, était de repérer le niveau de l'eau dans un récipient en train de se vider progressivement par un orifice. L'exercice qui suit se propose de déterminer la forme à donner à la section du récipient afin que le niveau du liquide dans le récipient descende à vitesse constante.

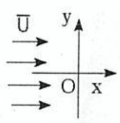
On considère un récipient à symétrie de révolution autour de l'axe vertical Oz, rempli d'eau dont on néglige la viscosité. La surface du liquide est à l'air libre (pression P_o). La section du récipient, à une hauteur z à partir du fond, a un rayon donné par l'équation $r = C.z^n$ où C est une constante. Le fond du récipient est percé d'un orifice très petit au niveau du point B, par lequel s'écoule le liquide à l'air libre. La section S_B de l'orifice en B est très petite devant S_A , section en A au niveau de la surface libre. Le rayon de l'orifice est r_B=2mm. La hauteur d'eau est initialement de 40 cm. On suppose l'écoulement suffisamment lent pour être considéré comme stationnaire.

1) Déterminer la pression en B en précisant soigneusement vos hypothèses. Faire un schéma.
2) Donner deux équations permettant de relier les vitesses du fluide en A et B.
3) Calculer la vitesse en A dans le cas général puis dans le cas où $S_B << S_A$.
4) On se place dans le cas $S_B << S_A$. Exprimer la vitesse V_A du fluide en A en fonction de n. Que vaut V_A dans le cas où le récipient est cylindrique ? Trouver la valeur à donner à n pour que le niveau de l'eau dans le récipient baisse à vitesse constante.
5) En supposant toujours $S_B << S_A$, calculer V_B. Vérifier si les effets de la viscosité sont négligeables. On donne $\eta_{eau}\sim 10^{-3}$ Pa.s , $8^{1/2}\sim 2{,}83$.

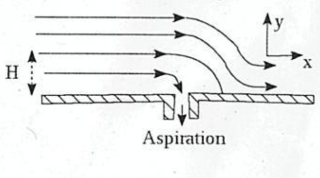


Exercice n°2 : *Ecoulement potentiel induit par un puits et un écoulement uniforme à 2D*

On considère un puits isotrope à deux dimensions, centrée sur l'origine O des coordonnées (x,y). Le débit volumique du puits est noté -q (q > 0) . Il n'existe pas de circulation de la vitesse autour du puits. Le fluide est parfait (viscosité nulle).



1) Montrer que le champ de vitesse induit par ce puits est $\vec{v}_1 = \frac{-q}{2\pi r}\vec{e}_r$ ($\vec{e}_r$ est le vecteur unité radial). En déduire la fonction de courant Ψ_1 de cet écoulement.
2) On considère un écoulement uniforme parallèle à Ox : $\vec{v}_2 = U\vec{e}_x$ (U > 0). Trouver la fonction de courant Ψ_2 de l'écoulement uniforme. Exprimer $\vec{v}_2$ et Ψ_2 en coordonnées polaires.
3) On considère le champ de vitesse $\vec{v}$ de l'écoulement créé par la superposition du puits et de l'écoulement uniforme. Trouver les coordonnées polaires (r,θ) du point d'arrêt A, où la vitesse est nulle.
4) Donner l'expression de la fonction de courant correspondant à la superposition du puits et de l'écoulement uniforme. En déduire l'équation des lignes de courant sous la forme y(θ). Trouver en particulier l'équation de la ligne de courant passant par le point d'arrêt. Tracer l'allure de cette ligne.
5) On considère l'écoulement d'un fluide parfait au-dessus d'un plan. Une pompe aspire le fluide à travers une fente dans le plan. La fente est parallèle à l'axe Oz . Montrer que le modèle précédent (puits+ écoulement uniforme) peut représenter cette situation. Trouver la hauteur H par rapport à la surface, à partir de laquelle le fluide n'est plus aspiré par la pompe. On donne U=1,5 m/s et q=4 l/s. Calculer H.



<u>Formulaire</u>

<u>Relation de Bernoulli pour un écoulement stationnaire :</u> Sur une ligne de courant : $\frac{1}{2}\rho v^2 + P + \rho g z$ = constante .

<u>Fonction de courant :</u> $\frac{\partial\psi}{\partial r} = -v_\theta$ $\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = r.v_r$ $\frac{\partial\psi}{\partial x} = -v_y$ $\frac{\partial\psi}{\partial y} = v_x$