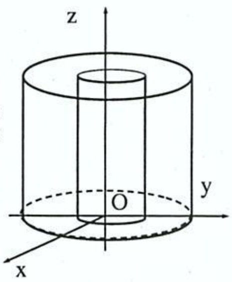
UNIVERSITE DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS **ANNEE 2011-2012**

LICENCE DE PHYSIQUE L3 SEMESTRE 2
MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Examen partiel. Mercredi 7 mars 2012.
Durée : 1h30

Pas de document autorisé. Voir formulaire à la fin.



Cisaillement uniforme a l'intérieur d'un tube épais

Le tube représenté sur la figure ci-contre, de rayon intérieur R_1, de rayon extérieur R_2 et de hauteur $H>>(R_1,R_2)$ est soumis sur la face interne ($r=R_1$) à une force par unité de surface uniforme dans la direction z $\vec{\sigma}=\sigma_0\vec{e}_z$. La paroi extérieure (cylindre R_2) est encastrée dans un support qui l'immobilise. On néglige la gravité et on supposera les déformations faibles. On désire trouver la répartition des contraintes et des déplacements dans le tube. L'absence de contraintes normales à l'intérieur du tube conduit à supposer que la composante radiale du déplacement u_r est nulle partout. On cherche le champ de déplacement sous la forme $\vec{u}=u(r)\vec{e}_z$.

1.a. Déterminer l'expression du tenseur des gradients de déplacement $\overline{\overline{G}}$ ainsi que le tenseur de déformation $\overline{\overline{\varepsilon}}$ et le tenseur de rotation pure $\overline{\overline{\omega}}$ en fonction du vecteur déplacement. Quelle est la variation relative de volume $\frac{dV}{V}$ en un point quelconque ?

1. b. Exprimer le tenseur de contraintes en fonction du déplacement et du module de cisaillement μ.

2.a. Quelle est l'équation locale d'équilibre du solide. La projeter dans la base cylindrique.
Ecrire les conditions aux limites. En déduire l'expression du déplacement en fonction des données du problème (déterminer d'abord l'expression de u'(r)).
Représenter l'allure de u(r).

2.b. Donner l'expression de $\overline{\overline{G}}$, $\overline{\overline{\varepsilon}}$, $\overline{\overline{\omega}}$ en fonction de r. Représenter la déformation d'un élément de surface carré judicieusement choisi sous l'action respectivement de $\overline{\overline{G}}$, $\overline{\overline{\varepsilon}}$, $\overline{\overline{\omega}}$. Caractériser la rotation locale (axe et angle) en fonction de la position.

2.c. Donner l'expression du tenseur des contraintes en fonction de la position. Représenter les contraintes en un point M(r,θ,z) de la façon qui vous semblera la plus judicieuse.

2.d. La rupture du matériau selon le critère de Tresca a lieu lorsque la contrainte tangentielle maximale excède une valeur Y. On rappelle que la contrainte tangentielle maximale en un point s'exprime à partir des contraintes principales σ_i comme $\sup_{i,j}\left\{\frac{\sigma_i-\sigma_j}{2}\right\}$. Déterminer la position du point de rupture et la valeur maximale de σ_0 avant rupture.

3. Calculer la force totale que le support doit exercer sur tube pour le maintenir immobile. Quel est le déplacement u_0 d'un point de la paroi intérieure en fonction notamment de σ_0 ? Calculer le travail de la force exercée sur l'intérieur du tube pour faire passer ce déplacement de u_0 à u_0+du_0. En déduire l'énergie élastique E_p emmagasinée par le solide déformé en fonction de u_0.

<u>Base cylindrique</u>

$$\mathrm{div}\overline{\overline{T}}=\left(\cancel{\frac{\partial T_{rr}}{\partial r}}+\cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial\theta}}+\frac{\partial T_{rz}}{\partial z}+\cancel{\frac{T_{rr}-T_{\theta\theta}}{r}}\right)\vec{e}_r+\left(\cancel{\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r}}+\cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial\theta}}+\cancel{\frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z}}+\cancel{\frac{2T_{r\theta}}{r}}\right)\vec{e}_\theta$$
$$+\left(\frac{\partial T_{zr}}{\partial r}+\cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial T_{z\theta}}{\partial\theta}}+\cancel{\frac{\partial T_{zz}}{\partial z}}+\frac{T_{zr}}{r}\right)\vec{e}_z$$