Examen, Decembre 2008

(durée : 3 heures)

Relations utiles

Gaz parfait (GP) monoatomique : $\gamma = C_P/C_V = 5/3$, $PV = NkT$, $E = E(T) = (3/2)NkT$,
Transformation adiabatique du GP : $TV^{\gamma-1}$ =const. , PV^γ =const.

$$dE = đQ + đW,\quad TdS = đQ,\quad -PdV = đW,\quad C_V = (đQ/dT)_V,\quad C_P = (đQ/dT)_P$$

$$Z = \sum_\psi e^{-\beta E(\psi)},\quad Z = \frac{1}{N!}\xi^N \text{ ou } \xi^N,\quad E = -\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta},\quad F = E - TS = -\frac{1}{\beta}\ln Z,\quad \beta = 1/kT$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},\quad \int_0^\infty dx\, x^2 e^{-x} = 2,\quad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, dy\, dz\, f(\vec{r}) = \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, f(\vec{r})$$

Pour une particule : $\xi = \int \frac{dx\,dp_x}{h}\frac{dy\,dp_y}{h}\frac{dz\,dp_z}{h} e^{-\beta E(\vec{r},\vec{p})}$, $\ln(N!) \simeq N\ln(N) - N$, $\partial \ln(N!)/\partial N \simeq \ln(N)$.

1 Susceptibilité magnétique

On considère un cristal composé de N atomes indépendants et discernables. Chaque atome peut être dans trois états distincts. Dans chacun de ces états, l'atome a un moment magnétique m_z différent : $m_z = -1$ dans le premier état, $m_z = 0$ dans le deuxième et $m_z = +1$ dans le troisième.
Les atomes sont plongés dans un champ magnétique B_z et l'énergie ϵ d'un atome est donnée par :

$$\epsilon = -\alpha B_z m_z$$

où α est une constante et où B_z peut être positif ou négatif.

1. Discutez qualitativement quel sera l'état de plus basse énergie du système suivant le signe de B_z.
2. Calculez la fonction de partition Z des N atomes ?
3. On appelle E l'énergie des N atomes et M_z la magnétisation totale (somme des magnétisations de chaque atome). Trouvez l'expression de l'énergie moyenne $\langle E\rangle$ et déduisez-en la valeur moyenne $\langle M_z\rangle$ de la magnétisation.
4. Montrez que, quand B_z est petit, M_z est proportionnelle à B_z. Le coefficient de proportionnalité est la *susceptibilité magnétique* χ :

$$M_z = \chi B_z \quad \text{pour } B_z \ll 1.$$

   Calculez χ. Comment se comporte χ quand la température tend vers 0 ?
5. Représentez shématiquement M_z en fonction de B_z pour différentes températures (faites 2-3 courbes sur la même figure correspondant aux différentes températures).
6. Calculez l'énergie libre F et l'entropie du système S. Etudiez les valeurs limite de $S(T)$ quand $T \to \infty$ et $T \to 0$. Commentez les valeurs trouvées.

2 Gaz de Van der Waals

Dans ce problème nous allons trouver l'énergie E d'un gaz de Van der Waals en fonction de la température T et de la pression V en utilisant son équation d'état

$$\left(P + \frac{aN^2}{V^2}\right)(V - Nb) = NkT \tag{1}$$

et sa capacité calorifique C_V que l'on supposera constante :

$$C_V = \frac{3}{2}Nk \tag{2}$$

Le nombre de particules N est fixé et a, b et k sont des constantes positives.

1. Rappelez la définition de l'énergie libre F. Retrouvez sa différentielle dF et la relation de Maxwell associée.
2. Montrez que l'expression de dE en fonction de dT et dV est

$$dE = C_V dT + \left(T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P\right)dV \tag{3}$$

3. En utilisant l'équation d'état (1) et l'expression de la capacité calorifique (2) trouvez l'expression de dE pour le gaz de Van der Waals en fonction de N, T et V et des constantes.
4. Intégrez cette expression de dE pour trouver $E(T,V)$ en fonction de N, k, T, a et de V. Comparez à l'énergie d'un gaz parfait.

Clairement, l'équation (1) peut se réécrire comme

$$P - Pbn = kTn - an^2 + abn^3 \tag{4}$$

où $n = N/V$. On simplifie cette expression en éliminant le terme Pbn et en choisissant $a = d/2$ et $ab = c/6$. On trouve alors

$$P = kTn - \frac{d}{2}n^2 + \frac{c}{6}n^3 \tag{5}$$

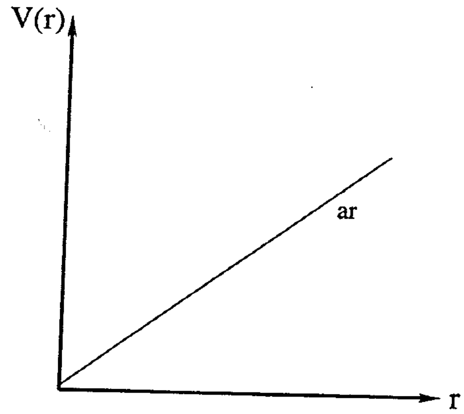
1. Calculez la compressibilité isotherme

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \tag{6}$$

2. Le système peut-il devenir instable ? Pour quelles densités n le système est-il stable (instable) ? Justifiez votre réponse.

3 Atomes dans un piège

Un gaz est composé de N atomes indiscernables sans interaction entre eux. Ce gaz est maintenu dans un piège à atome : un potentiel de la forme $V(r) = ar$ où $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Le gaz est à l'équilibre thermique à la température T.



1. Trouvez l'expression de la fonction de partition ξ pour un atome piégé. Exprimez votre réponse sous la forme $\xi = A\,T^{\alpha}\,a^{-\eta}$. Trouvez le préfacteur A et les exposants α et η.
   Indice : En coordonnées sphériques, l'élément de volume $dx\,dy\,dz$ est remplacé par $r^2 dr\ \sin(\theta) d\theta\, d\phi$ (θ variant de 0 à π et ϕ de 0 à 2π).
2. Montrez que l'énergie totale par atome vaut $\langle\epsilon\rangle = \frac{9}{2}kT$.
3. Trouvez les valeurs de l'énergie cinétique moyenne $\langle\epsilon_c\rangle$ et de l'énergie potentielle moyenne $\langle\epsilon_p\rangle$ (par atome dans les deux cas).
4. Calculez la valeur moyenne $\langle r\rangle$ de la distance d'un atome par rapport au centre du piège.
5. Trouvez l'entropie du gaz en fonction de N, k et $\xi(T, a)$ (ne laissez pas de dérivées non évaluées dans votre réponse).
6. Le gaz peut être refroidi en décroissant le potentiel de manière réversible (en diminuant a) sans qu'aucune chaleur soit échangée avec l'extérieur ($đQ = 0$, $dS = 0$). Sous ces conditions, trouvez l'expression de T en fonction de a et des valeurs initiales T_0 et a_0.