EXAMEN

(durée : 3 heures)

Relations utiles

Gaz parfait monoatomique : $\gamma = C_p/C_v = 5/3$, Gaz parfait bi-atomique : $\gamma = C_p/C_v = 7/5$,

Gaz parfait : $PV = nRT = NkT$, $n =$ nombre de moles, $R = 8.31\text{JK}^{-1}$, transformation adiabatique : $PV^\gamma = const$,

Gaz parfait en 2 dimensions : $PA = nRT = NkT$, A est la surface du sytme

Approximation de Stirling : $\ln M! \approx M\ln M - M$, Constante de Boltzmann : $k = 1.38 \times 10^{-23}\text{JK}^{-1}$

$F = E - TS = -\frac{1}{\beta}\ln Z$, $G = \mu N = F + PV$, $đW = -P\mathrm{d}V$, $T\mathrm{d}S = \mathrm{d}E - đW$, $\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}\big|_x$

1 Thermodynamique

Dans tout ce problème on travaille sur une more de gaz parfait de masse molaire M.

1.1 Travail

[i] Pour une mole de gaz parfait à $T = 0°$C, calculer le travail W, en Joules, produit dans une dilatation isotherme d'un volume V_0 à $10V_0$.

[ii] Pour une mole de gaz monoatomique ayant initialement un volume V_0 et une température $T_i = 0°$C, trouver la température finale, en °C, quand le volume est dilaté à $10V_0$, de façon adiabatique. Préciser la valeur numérique.

1.2 Ondes

La vitesse d'une onde longitudinale de faible amplitude dans un gaz parfait est

$$c = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}} \tag{1}$$

où P est la pression du gaz et ρ sa densité, $\rho = M/V$. Donner l'expression de :

[iii] La vitesse du son pour un gaz dans lequel les compressions sont isothermes. Rappel : $PV = RT$.

[iv] La vitesse du son pour un gaz dans lequel les compressions sont adiabatiques.

[v] La masse moyenne d'une mole d'air est $M = 28.8$g/mole, et pour l'Helium elle est de 4g/mole. En supposant que l'Helium et l'air sont des gazs parfaits, calculez la vitesse du son en m/s dans les cas isothermes et adiabatiques à $T = 0°$C. Attention aux dimensions.

[vi] Peut-être avez-vous fait ou vu l'expérience suivante. Si vous inhalez de l'Helium et parlez, votre voix sonne à un ton plus haut que normal. A partir des résultats de la question [v], pouvez-vous dire quelle quantité physique est déterminée dans le larynx quand vous produisez un son ?

---

2 Film de savon

Un film de savon est maintenu entre les 4 côtés d'un rectangle ABCD (figure 1). La barre AD, de longueur (ℓ), est mobile et son déplacement parallèlement à BC sans modification des angles permet d'étirer le film. Le module de la force $\vec{f}$, dirigée dans le sens des x positifs, à exercer pour maintenir AD fixe est $\sigma\ell$, où σ est la tension superficielle.

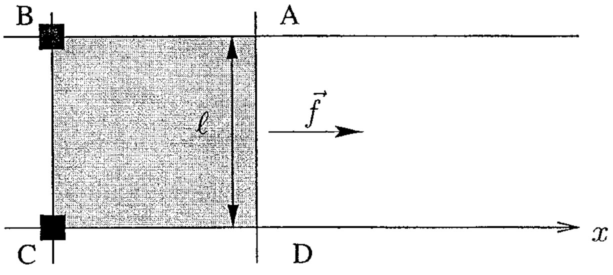

FIG. 1 – Film de savon sur un cadre mobile.

[i] Écrivez l'équation ($T\mathrm{d}S$) de ce problème. **Indication** : Pour $\text{đ}W$ on fait l'analogie avec un gaz en faisant attention au signe.

[ii] En utilisant l'expression pour F, l'energie libre, et le resultat precedent, calculez dF et déduisez en l'expression de Maxwell :

$$\left.\frac{\partial S}{\partial x}\right|_T = -\ell \left.\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right|_x \tag{2}$$

[iii] On définit la chaleur spécifique à longueur constante de la manière habituelle :

$$C_x = T \left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_x$$

Exprimez $(\partial E/\partial T)_x$ et $(\partial E/\partial x)_T$ en fonction de C_x, T et des dérivées partielles de la tension superficielle σ.

[iv] Dans une large plage de température autour de $T = 300\,\mathrm{K}$, la tension superficielle de l'eau savonneuse évolue linéairement avec la température :

$$\sigma = \sigma_0(1 - a(T - T_0)) \tag{3}$$

où σ_0, a, T_0 sont des constantes : $\sigma_0 = 8 \times 10^{-2}\,\mathrm{Nm}^{-1}$, $a = 1.5 \times 10^{-3}\,\mathrm{K}^{-1}$, $T_0 = 273.16\,\mathrm{K}$.

On étire le film d'une quantité (dx), de manière *quasistatique*, et à *température constante*. Calculez l'accroissement infinitésimal d'énergie interne du film, (dE) et le travail ($\text{đ}W$), qui accompagne cette transformation. [**Indication :** $\mathrm{d}E = (\partial E/\partial x)_T \mathrm{d}x + (\partial E/\partial T)_x \mathrm{d}T$]. Vérifiez qu'il faut apporter de l'énergie sous forme de chaleur au film pour maintenir sa température constante.

[v] Vérifiez que, dans le régime où (σ) évolue suivant la loi (3), (C_x) est indépendant de la longueur du film.

[vi] On peut définir le coefficient de "rétractabilité isotherme" par $\kappa_T = -\dfrac{\ell}{\mathcal{A}} \left.\dfrac{\partial x}{\partial f}\right|_T$ où $\mathcal{A}$ représente l'aire du film. En examinant le comportement de $(\partial f/\partial x)_T$, qu'obtenez-vous pour κ_T ?

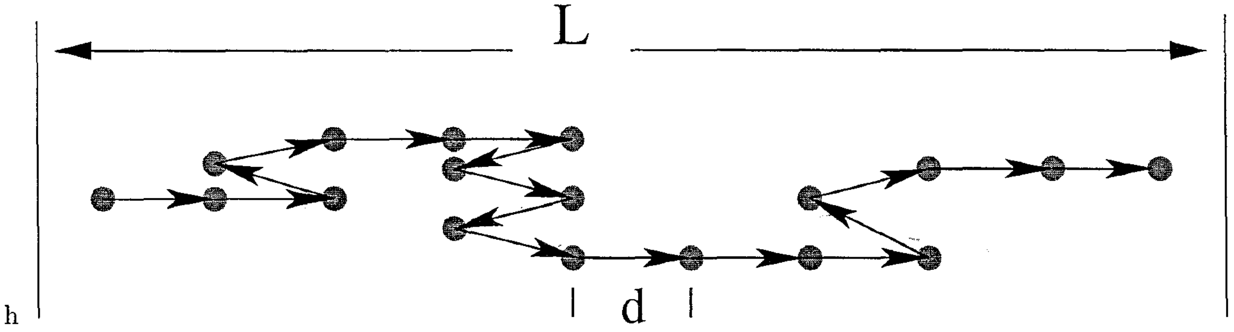

FIG. 2 – N molécules, N est constant, d est la longueur d'un lien.

3 Elasticité

L'élasticité d'un caouchouc peut être décrite par un modèle de polymère à une dimension constitué de N molécules liées bout-à-bout (figure). L'angle entre deux liens successifs peut-être 0 ou π avec équiprobabilité. On note d la longueur d'un lien.

[i] Soit N_+ le nombre de liens faisant un angle 0 et N_- le nombre de liens faisant un angle π. Quelle est la longueur, L, du ruban élastique?

[ii] En posant $L = 2md$, montrez que le nombre de configurations correspondant à une même longueur de ruban est :

$$g(N,m) = \frac{2(N!)}{(\frac{N}{2}+m)!\,(\frac{N}{2}-m)!} \tag{4}$$

où $m > 0$.

[iii] Si $m \ll N$, cette expression devient

$$g(N,m) \approx g(N,0)\exp(-2m^2/N) \tag{5}$$

Déduisez-en l'entropy du système en fonction de L et $g(N,0)$ pour $N \gg 1$ et $L \ll Nd$.

[iv] A partir des relations thermodynamiques : $F = E - TS$, $\mathrm{d}E = T\mathrm{d}S + f\mathrm{d}L$ trouvez la force, f, nécessaire pour maintenir la longueur L constante pour $L \ll Nd$. **Indication** : Calculez $\mathrm{d}F$ et déduisez-en une relation de Maxwell.