

EXAMEN

(durée : 3 heures)

Relations utiles

$$PV = NkT, \quad PV^\gamma = \text{const.} \quad \delta W = -PdV, \quad \delta Q = TdS = dE + PdV$$

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N}, \quad \frac{P}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{E,N}, \quad \frac{-\mu^i}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial N_i}\right)_{E,V,N_{j \neq i}},$$

$$\ln(1+x) \approx x - x^2/2 \dots \text{ for } x \ll 1, \quad \sum_{n=0}^N C_N^n x^n = (1+x)^N.$$

$$\text{Monoatomic gas : } C_P/C_V = \gamma = 5/3 \quad \text{Diatomic gas : } C_P/C_V = \gamma = 7/5$$

1 Travail et chaleur

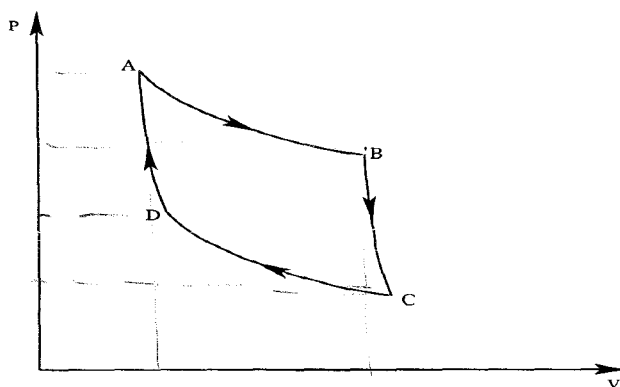


FIG. 1 – Cycle de Carnot dans le plan PV

La figure 1 représente le cycle de Carnot dans le plan PV fonctionnant entre deux températures $T_1 > T_2$. Le cycle de Carnot a deux transformations isothermes et deux transformations adiabatiques. Dans ce problème, la machine fonctionne en utilisant un gaz parfait. On rappelle que l'énergie interne E d'un gaz parfait dépend seulement de sa température : durant une transformation isotherme, E reste constante.

[1] Quelles parties du cycle montré en figure 1 sont isothermes et quelles parties sont adiabatiques. Aide : isothermes, $PV = \text{const}$, adiabatique : $PV^\gamma = \text{const}$.

[2] Représentez le cycle de Carnot dans le plan TS où T est la température et S est l'entropie. Indiquez quels points sur cette figure correspondent aux points de la figure 1.

[3] Durant quelle partie du cycle a-t'on des échanges de chaleur ? Spécifiez si la chaleur est absorbée ou donnée. Calculez les quantités de chaleur absorbée Q_1 et donnée Q_2 . Exprimez vos réponses en termes de températures et de volumes.

[4] Montrez que :

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D} \quad (1)$$

[5] Calculez le travail W fourni pendant un cycle complet.

[6] Quelle est l'efficacité de cette machine ?

2 Gaz de particules chargées sur un réseau en une dimension

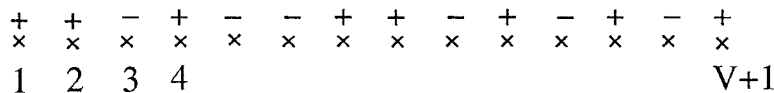
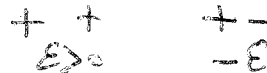


FIG. 2 – Les sites du réseaux sont représentés par les croix \times , les particules par des $+$ ou $-$ suivant leur charge. Il y a $V + 1$ sites et donc V intervalles entre les sites.

Nous considérons un modèle simple de gas de particules chargées sur un réseau en une dimension. Il y a deux types de particules, chargées positivement ou chargées négativement. Nous plaçons $V + 1$ particules sur un réseau unidimensionnel de $V + 1$ sites comme montré sur la figure 2. V est donc le “volume” du système et il n’y a aucun site vide : chaque site est occupé soit par une particule positive, soit par une particule négative.

Les charges identiques se repoussent : quand deux charges de même signe sont voisines, l’énergie potentielle est $\epsilon > 0$, quand deux charges de signes opposés sont voisines, l’énergie potentielle est de $-\epsilon$.

2.1 Ensemble microcanonique



[1] Dessinez les configurations qui représentent le minimum possible de l’énergie pour ce système. Quelle est la valeur de cette énergie? Même question pour la configuration d’énergie maximum.

[2] Quelle est l’énergie E_1 du système quand il y a seulement une paire de charges identiques qui sont voisines? Même question quand il y a deux paires de charges identiques voisines. De là, vous devriez pouvoir déduire l’expression de E_n , l’énergie quand il y a n paires de charges identiques voisines.

[3] L’entropie est donné par $S_n = k \ln \Omega_n$ où Ω_n est le nombre de configurations quand il y a n paires de voisins portant la même charge. Calculez Ω_n et ensuite l’entropie S_n . Simplifiez cette expression en utilisant l’approximation de Stirling.

[4] Calculez la température, T , et la pression P . Exprimez n et E_n trouvés en [2] en fonction de T .

[5] En assumant qu’il y a très peu de paires de charges identiques voisines, en d’autres termes que $n/V \ll 1$, montrez que l’équation d’état du système trouvée en [4] se ramène à $PV = nkT$. Pouvez-vous justifier le fait que l’on retrouve l’équation d’état des gaz parfaits?

[6] Gardez maintenant le prochain terme du développement en série du logarithme dans [5] et calculez la première correction à l’équation d’état. Mettez votre résultat sous la forme de l’équation de Van der Waals.

$$\left(P + \frac{a}{\left(\frac{V}{n}\right)^2} \right) \left(\frac{V}{n} - b \right) = kT \quad (2)$$

et calculez les valeurs de a et b .

2.2 Ensemble canonique

[7] On rappelle que

$$Z = \sum_{n=0}^V \Omega_n e^{-\beta E_n} \quad (3)$$

Calculez la fonction de partition dans l’ensemble canonique.

[8] Calculez l’énergie moyenne \bar{E} et la chaleur spécifique à volume constant C_V . Pour l’énergie, comparez votre résultat avec ce que vous avez trouvé en [2].