Université de Nice – Sophia-Antipolis   Année 2006-2007   L3/1-Probabilités – Département de Physique

Licence de Physique 3^{e} année, 1er semestre

Probabilités – 2006-07

Examen de première session, 8 Janvier 2007

Date d'édition : 31 décembre 2006

Distributions discrètes

Durée : 2 heures. Documents : une feuille 21×29.7 manuscrite.
Les parties I et II sont indépendantes
I.2, I.3 et I.4 peuvent être traités indépendamment de I.1
II.1, II.2 et II.3(a) sont indépendants

I. Distribution discrète et séries réelles ($\approx$ /10)

Soit la variable aléatoire N de valeurs n entières, positives ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 0$) ; la probabilité que $N = n$ est donnée par

$$P(N = n) = \frac{k}{1+n^2}$$

n variant de zéro à l'infini et k étant un réel positif non nul constant. Pour étudier les moments de cette distribution, on considère les séries $\mathcal{S}(p)$ définies par

$$\mathcal{S}(p) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(p) \qquad \text{de terme général} \qquad u_n(p) = \frac{n^p}{1+n^2}$$

1- ***Critère de d'Alembert*** ($\approx$ /1)

Étudier la convergence de $\mathcal{S}(p)$ selon la valeur de p en utilisant le critère de d'Alembert.

2- ***Approche analytique et encadrement de*** $\mathcal{S}(0)$ ($\approx$ /4)

(a) ($\approx$ /2) Faire une étude rapide des fonctions $f_p(x) = x^p/(1+x^2)$ pour x (réel) variant de zéro à l'infini et pour $p = 0, 1, 2, 3$, puis pour une valeur quelconque. On examinera plus particulièrement les comportements pour x petit, x grand, les points fixes (indépendants de p) et les extremums.

(b) ($\approx$ /2) Montrer *graphiquement* que la valeur numérique de $\mathcal{S}(0)$ est encadrée par I_1 et $1 + I_2$ où I_1 et I_2 sont des intégrales de la forme $\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ et $\int_b^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ dont on précisera les bornes initiales a et b. En déduire un encadrement du facteur de normalisation k de la distribution.

... / ...

3- ***Encadrement numérique de*** $\mathcal{S}(0)$ ($\approx$ /2)

Un calcul sur tableur a montré que

$$\sum_{n=0}^{10000} \frac{1}{1+n^2} \simeq 2,076574052 \tag{1}$$

Par une méthode analogue à la précédente, effectuer un encadrement du reste $\mathcal{R} = \sum_{n=10001}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ de la série $\mathcal{S}(0)$ et déterminer avec quelle précision $\Delta\mathcal{S}(0)$ le résultat (1) donne la valeur de la série complète $\mathcal{S}(0)$. En déduire une valeur approchée de k et sa précision Δk.

4- ***Encadrement de*** $\mathcal{S}(p)$ ***pour*** $p \geqslant 0$ ($\approx$ /3)

Reprendre avec $\mathcal{S}(1)$ le même travail qu'en **2**(b) avec $\mathcal{S}(0)$. Quelles sont les conséquences statistiques pour la distribution ? Étudier de la même façon les séries $\mathcal{S}(p)$ avec $p > 1$. À quel genre de problème doit-on rattacher ces résultats ?

II. Étude d'une distribution discrète ($\approx$ /10)

Soit la variable aléatoire N de valeurs n entières, positives ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 0$) ; la probabilité que $N = n$ est donnée par

$$P(N = n) = k\mathrm{e}^{-\lambda n}$$

n variant de zéro à l'infini, k et λ étant des réels positifs, non nuls et constants.

1- ***Fonction de répartition*** ($\approx$ /2)

Calculer la fonction de répartition de cette distribution : $F(n) = P(N < n)$. En déduire le facteur de normalisation k en fonction de λ.

2- ***Fonction caractéristique*** ($\approx$ /2)

Calculer la fonction caractéristique de cette distribution : $\varphi(t) = \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}tN} \rangle$. En déduire de nouveau le facteur de normalisation k en fonction de λ.

3- ***Moments statistiques et caractéristiques numériques*** ($\approx$ /6)

(a) ($\approx$/3) Calculer directement les moments d'ordre 1 et 2, $\langle N \rangle$ et $\langle N^2 \rangle$. Déduire la variance et l'écart-type de N.

(b) ($\approx$/3) Calculer les moments d'ordre 1 et 2, $\langle N \rangle$ et $\langle N^2 \rangle$ par la fonction caractéristique.