Partiel du 4 novembre 2008

1 Calcul d'intégrales

1. Calculer par la méthode des résidus l'intégrale
$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh(ax)} dx,$$
où a est un paramètre réel.
2. Calculer les deux intégrales suivantes
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x + i\epsilon} dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x + i\epsilon} dx,$$
où $\epsilon > 0$.
On motivera précisément le contour considéré pour effectuer ces calculs par la méthode des résidus et on justifiera l'annulation de la contribution de la partie de ce contour située dans le plan complexe.
3. En utilisant les résultats du point précédent calculer l'intégrale
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$
4. Calculer la transformée de Fourier de la fonction porte $\Pi(x)$. Utiliser ensuite ce résultat pour retrouver la valeur de $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.
5. Calculer $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \cos x}{x} dx$

2 Filtre linéaire, convolution et analyse de Fourier

On considère une filtre linéaire dont la dynamique entrée x/sortie y est caractérisée par l'équation différentielle :
$$\frac{dy}{dt} = \alpha(x - y),$$
où $\alpha > 0$.

1. Montrer que la réponse impulsionelle de ce filtre peut s'écrire $R^{(1)}(t) = \alpha e^{-\alpha t} H(t)$ (avec $H(t)$ la fonction d'Heaviside et $\alpha > 0$).

2. Ecrire explicitement la relation entre les transformées de Fourier $\hat{y}(\nu)$ et $\hat{x}(\nu)$ pour ce système.
3. On considère l'assemblage en série de deux de ces filtres linéaires (la sortie du premier devient l'entrée du second). Calculer la réponse impulsionnelle $R^{(2)}(t)$ de ce système.
4. Calculer la réponse implusionnelle $R^{(3)}(t)$ du système obtenu en connectant en série trois de ces filtres identiques.
5. Généraliser le calcul précédent pour déduire la réponse impulsionnelle $R^{(n)}(t)$ de n filtres identiques connectés en série. Montrer que celle-ci peut s'écrire

$$R^{(n)}(t) = \alpha^n \frac{t^{n-1} e^{-\alpha t}}{(n-1)!} H(t)$$

6. Calculer la réponse en fréquence de cet assemblage de n filtres. Dessiner le graphe du module de cette fonction. De quel type de filtre fréquentiel s'agit-il ?
7. Tracer le graphe de $R^{(n)}(t)$. Montrer que cette fonction possède un maximum en un certain $t_c > 0$. Calculer l'aire en dessous du graphe de $R^{(n)}(t)$.
(Indication : $\int_0^\infty s^n e^{-s} ds = n!$).
8. Déduire du point précédent que dans la limite d'un grand nombre de ces filtres en série ($n \to \infty$, $\alpha \to \infty$, mais supposant $(n-1)/\alpha$ fini et constant), la réponse impultionnelle $R^{(\infty)}(t)$ tend vers une distribution δ de Dirac. Dans cette limite, quelle est l'effet de ce système de filtres sur un signal d'entrée $x(t)$?
9. On considère le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \alpha(1 - y_1) \\ \frac{dy_2}{dt} &= \alpha(y_1 - y_2) \\ \frac{dy_3}{dt} &= \alpha(y_2 - y_3) \end{aligned}$$

En utilisant les résultats obtenus précédemment, écrire la solution de ce système pour $t \geq 0$ si $y_i(t) = 0$ pour $t < 0$.