Examen du 16 octobre 2009

Durée : 1h 55 min. Aucun document sauf le formulaire des T.F.

1. [8 *points*]. Calculs dans le plan complexe.

   (a) Calculez l'intégrale suivante en utilisant le méthode des résidus de Cauchy (k est un nombre réel, positif ou négatif) :

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{x^2+x+1}dx$$

   Note : la convergence des "intégrales de chapeau" ne sera justifiée que brièvement.

   (b) Utilisez le résultat précédent pour :
   - obtenir la transformée de Fourier $\hat{g}(\nu)$ de la fonction $g(t) = \frac{1}{t^2+t+1}$
   - obtenir le résultat exact de l'intégrale

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+x+1}dx$$

2. [12 *points*]. La suspension automobile *avec amortisseur*.

   Le système de suspension d'une automobile est schématisé sur la figure 1. Pendant que la roue $(\mathcal{R})$ se déplace sur la piste $(\mathcal{P})$ selon la trajectoire $S(t)$ (fonction du temps qui correspond à l'excitation du système), le ressort de raideur k transmet les variations d'altitude à la masse m figurant la caisse $(\mathcal{C})$ de l'automobile ; en outre, un amortisseur exerce une force de frottement visqueux sur le système, avec le coefficient de viscosité κ ; $(\mathcal{C})$ parcourt une trajectoire $y(t)$ qui correspond à la réponse du système à l'excitation $S(t)$. On admettra que $y(t) - S(t)$ représente l'allongement algébrique du ressort par rapport à sa position d'équilibre[1].

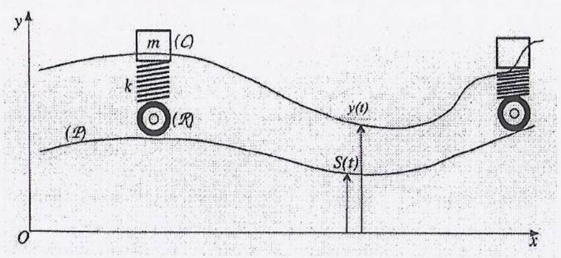

FIGURE 1 – Schématisation de la suspension d'une automobile.

   (a) Vérifier que $S(t)$ et $y(t)$ sont liées par l'équation différentielle :

   $$\ddot{y} + \gamma\dot{y} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 S(t) \qquad \text{avec} \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad \gamma = \frac{\kappa}{m} \qquad (1)$$

   Indication : on rappelle que la solution générale de l'EDO (1) sans second membre ($S(t) = 0$), peut s'écrire comme $(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))e^{-\frac{\gamma}{2}t}$, avec $\omega^2 = \omega_0^2 - (\gamma/2)^2$ qui sera supposé strictement positif.

   (b) Calculer la réponse impulsionnelle $R(t)$ de ce système "excitation/réponse".

   (c) Donner, sous la forme d'un produit de convolution explicite, une expression générale de la réponse $y(t)$ à une excitation quelconque $S(t)$.

   (d) Calculer la réponse en fréquence du système en supposant que l'excitation d'entrée est de la forme $S(t) = \exp(i2\pi\nu t)$. Pour cette question on travaillera avec la fréquence ν_0 plutôt qu'avec la pulsation ω_0. On rappelle que $2\pi\nu_0 = \omega_0$.

   (e) Du point précédent déduisez la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle $R(t)$ calculée au point (b) ci-dessus. Calculez et représentez le graphe de la fonction $|\hat{R}(\nu)|^2$. (On calculera les valeurs de cette fonction en $\nu = 0$ et en $\nu = \nu_0$.) A quel type de filtre en fréquence le système de suspension automobile modélisé ci-dessus correspond-il ?

   (f) La roue $(\mathcal{R})$, de diamètre négligeable, se déplace avec une vitesse de composante horizontale v constante sur une piste de hauteur variable $S(x)$ le long de l'axe horizontal Ox. En premier lieu, un obstacle ponctuel situé en $x = 1$ sur une piste horizontale est modélisé par $S_1(x) = a\,\delta(x-1)$. Exprimer l'excitation $S_1(t)$ correspondante.

   Ensuite, une suite d'obstacles disposés de façon périodique est modélisée par un peigne de Dirac $S_2(x) = a\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(x-m)$. Exprimer l'excitation $S_2(t)$ correspondante.

   (g) Calculer la réponses $R_1(t)$ correspondant au premier cas. Vérifier qu'après le passage de l'obstacle l'élongation du ressort se met à varier sinusoïdalement avec une amplitude exponentiellement amortie.

   (h) Dans le second cas, la suspension vibre de façon périodique. Ecrivez cette fonction périodique $R_2(t)$ comme la périodisation d'une fonction donnée.

   (i) Rappelez la formule de Poisson et utilisez celle-ci pour écrire la série de Fourier de la vibration périodique de la suspension calculée au point précédent.

   (j) Pour quelle(s) vitesse(s) du véhicule, a-t-on un phénomène de résonance ? (Maximisation de l'amplitude des vibrations).

1. On néglige la longueur h_0 du ressort au repos qui est considérée comme nulle. Sinon il suffit de remplacer y par $y + h_0$.