Examen du 13 janvier 2009

1. [8 *points*]. Fonctions d'une variable complexe.
   (a) Enoncer le théorème des résidus de Cauchy.
   (b) Calculer l'intégrale suivante en justifiant les étapes de la méthode utilisée :
   $$I(a) = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} \; ,$$
   où $a > 0$ est un nombre réel.
   En utilisant le résultat de ce calcul, peut-on extrapoler la valeur de $I(a)$ en $a = 0$, et en $a = i\,b$ (c'est-à-dire a purement imaginaire) ?

2. [3 *points*]. Représenter graphiquement le signal $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-t}\delta(t-n)$.
   Calculer $\int_{0^-}^{\infty} g(t)dt$.

3. [9 *points*]. On considère un filtre dont la réponse impulsionnelle est donnée par la fonction :
   $$R(t) = \sin^2(\pi t)\Pi(t - \frac{1}{2})$$
   où $\Pi(t)$ est la fonction porte habituelle.
   (a) Dessiner le graphe de $R(t)$.
   (b) Soit $x(t)$ un signal d'entrée. Ecrire le signal de sortie $y(t)$ sous forme d'une intégrale temporelle. Le filtre défini par $R(t)$ est-il causal ? Quel est le sens physique de cette propriété ?
   (c) Si la T.F. d'une fonction $f(t)$ est notée $\hat{f}(\nu)$, calculer la T.F. d'une fonction de la forme $\sin^2(\pi t) f(t)$. (indication : utiliser $\sin^2 x = (1-\cos 2x)/2$)
   (d) Calculer la T.F. de la fonction $\Pi(t - \frac{1}{2})$.
   (e) Calculer la T.F. de la réponse impulsionnelle $R(t)$ définie ci-dessus. Obtenir une expression compacte sous forme de la fonction $\sin(\pi\nu)\, e^{-i\pi\nu}$ divisée par un polynôme en ν.
   (f) Représenter le graphe de $|\hat{R}(\nu)|$ en indiquant les valeurs aux fréquences entières (0, 1, 2...).
   (g) De quel type de filtre s'agit-il ? Comment le filtrage en fréquence obtenu avec ce système se compare-t-il avec celui dont la réponse impulsionnelle est donnée par $R_0(t) = \Pi(t - \frac{1}{2})$?