Licence de Physique 3^e année, 1^{er} semestre

Transformation de Fourier et Analyse – 2006-07

Examen de première session, 11 Janvier 2007

Date d'édition : 29 décembre 2006

Durée : 2 heures. Documents : une feuille 21×29.7 manuscrite, pas de calculatrice.
Les parties I et II sont indépendantes
I.2 peut être traité indépendamment de I.1
II.3 ne nécessite que la réponse de II.2*b*

I. Transformée de Fourier de la distribution $H(x)$ de Heavyside ($\approx /8$)

1- ***Méthode directe « par atténuation »*** ($\approx /3$)

On connaît la méthode d'atténuation qui consiste, lorsque l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ de la fonction $f(x)$ diverge à l'infini, à travailler avec l'intégrale $\int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} f(x)\,\mathrm{d}x$ ($\lambda \in \mathbb{R}^+$) de façon à atténuer $f(x)$ à l'infini par une exponentielle. Lorsque ce calcul aboutit, on peut parfois obtenir l'intégrale initiale en faisant tendre λ vers zéro. Cette méthode a été utilisée pour le calcul de $\int_0^{+\infty} \mathrm{sinc}(x)\,\mathrm{d}x$ et pour celui de la transformée de Fourier de $H(x)\sin x$.

Utiliser la méthode d'atténuation pour calculer la transformée de Fourier de la fonction $H(x)$ de Heavyside : $H(x) = 1$ si $x \geqslant 0$ et $H(x) = 0$ si $x < 0$.

2- ***Méthode des distributions*** ($\approx /5$)

(*a*) ($\approx$/2) Quelle est la dérivée $H'(x)$ de $H(x)$? En déduire la valeur de $\langle H', \phi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} H'(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x$, $\phi(x)$ étant une « bonne » fonction-test quelconque. En utilisant la définition générale d'une dérivée de distribution, écrire le produit scalaire $\langle H', \phi\rangle$ sous forme d'un produit scalaire faisant intervenir $H(x)$. Retrouver le résultat précédent directement.

(*b*) ($\approx$/3) Écrire les expressions précédentes en fonction des transformées de Fourier (on utilisera le théorème de Parseval-Plancherel généralisé aux produits scalaires) et en déduire la transformée de Fourier $\widehat{H(\nu)}$ de $H(x)$.

II. Systèmes oscillants ($\approx$ /12)

Soit un oscillateur amorti à une dimension (" système ($\mathcal{S}$) ") décrit par la fonction du temps $x(t)$ et excité par une action extérieure $S(t)$. L'équation différentielle régissant son évolution est

$$\ddot{x} + \lambda\dot{x} + \Omega^2 x = S(t)$$

où λ et Ω sont des réels positifs constants (λ : coefficient d'amortissement visqueux). On se propose d'étudier $x(t)$ pour des excitations $S(t)$ sinusoïdales.

1- ***Réponse impulsionnelle*** ($\approx$ /3)

Calculer la transformée de Fourier (T.F.) $\widehat{T}(\nu)$ de la réponse impulsionnelle $T(t)$ de ce système.

2- ***Réponse à une excitation sinusoïdale*** ($\approx$ /5)
On applique au système ($\mathcal{S}$) l'excitation dite " sinusoïdale " (et sans limitation de temps) :

$$S(t) = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} = a\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\nu_0 t}$$

où a et $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ sont des constantes réelles positives, ω_0 n'étant pas forcément égal à Ω (par la suite, on utilisera indifféremment ν_0 ou $\omega_0 = 2\pi\nu_0$).

a) ($\approx$/1) Écrire formellement, d'une façon générale et sans démonstration, la T.F. $\widehat{R}(\nu)$ de la réponse $R(t)$ du système ($\mathcal{S}$) à une excitation $S(t)$ quelconque de T.F. $\widehat{S}(\nu)$. Toujours sans démonstration et de façon générale, écrire la réponse $R(t)$ en fonction de la réponse impulsionnelle $T(t)$ et de l'excitation $S(t)$.

b) ($\approx$/2) Calculer explicitement $R(t)$ dans l'exemple présent : on montrera que $R(t) = f(\nu_0)S(t)$ et on calculera explicitement $f(\nu_0)$.

c) ($\approx$/2) Énoncer un théorème général.

3- ***Application aux systèmes oscillants réels*** ($\approx$ /4)

a) ($\approx$/2) On suppose le système ($\mathcal{S}$) sans amortissement ($\lambda = 0$). Tracer $|f(\nu_0)|$ en fonction de ν_0 (positif) en détaillant les comportements asymptotiques et au voisinage de $\nu_0 = 0$. Quelle est la réponse $R(t)$ pour $\nu_0 = 0$? Sans calcul, deviner qualitativement $R(t)$ pour $S(t) = aH(t)$, $H(t)$ étant la fonction de Heavyside.

b) ($\approx$/2) L'amortissement n'étant plus nul ($\lambda \neq 0$), tracer $|f(\nu_0)|$ en fonction de ν_0 (positif) en détaillant les comportements pour $\nu_0 \to 0$ et $\nu_0 \to \infty$. On examinera plus particulièrement le maximum de $|f(\nu_0)|$, atteint pour la valeur ν_0^*. Tracer la fonction $\nu_0^*(\lambda)$. Ce maximum existe-t-il toujours ? Quelle est la valeur critique de λ pour laquelle il disparaît ? Que se passe-t-il si λ est trop grand ?