Oscillations Non-linéaires

Epreuve de Dynamique Non-Linéaire (II)

10/05/2007

On se donne l'équation différentielle décrivant la dynamique d'un oscillateur

$$\ddot{x} + (ax^2 - \epsilon)\dot{x} + x + bx^3 = 0$$

non linéaire

ou a et b sont deux paramètres fixés et ϵ, un "petit" paramètre, que l'on fait varier de valeurs négatives à des valeurs positives. Pour $\epsilon = 0$, lorsque l'on néglige les termes non-linéaire, l'équation différentielle devient celle de l'oscillateur harmonique

$$\ddot{x} + x = 0$$

(1) Ecrire l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique sous la forme de deux équations différentielles du premier ordre pour x et $y = \dot{x}$.

(2) On introduit l'amplitude complexe de l'oscillation par le changement de variable

$$A = x + iy \qquad \bar{A} = x - iy$$

Calculez x et y en focntion de A et $\bar{A}$ ou $\bar{A}$ représente le complexe conjugué de A

(3) En utilisant l'équation de l'oscillateur harmonique sous la forme établie à la question (1), montrez que l'équation pour l'amplitude complexe est

$$\dot{A} = -iA$$

(4) Posons $A(t) = B(t)\exp(-it)$. Trouvez l'équation différentielle à laquelle $B(t)$ obéit. Qu'en déduisez vous pour la variation de B au cours du temps ?

Ex (5) On revient au problème de l'oscillateur non-linéaire pour ϵ petit mais non nul. Ecrivez l'équation différentielle de l'oscillateur sous la forme de deux équations différentielles du premier ordre.

(6) En remplaçant x et y par leurs expressions en fonction de A et $\bar{A}$ calculées à la question (2), montrez que l'équation différentielle pour l'amplitude complexe A s'écrit

$$\dot{A} = f_{10}A + f_{30}A^3 + f_{21}A^2\bar{A} + f_{12}\bar{A}^2A + f_{03}\bar{A}^3$$

Calculer les coéfficients f_{ij}

(7) On pose a nouveau $A(t) = B(t)\exp(-it)$. Ecrire l'équation différentielle pour B.

(8) Justifiez l'expression suivante : *pour ϵ "petit" et pour des oscillations de "faible" amplitutes, B varie peu au cours du temps.*

(9) La période de l'oscillation linéaire est $T = 2\pi$. On se propose de "moyenniser" l'équation obtenue pour B sur une periode T. On définit $< Q(t) >$ comme la moyenne sur une période d'une quantité $Q(t)$ par

$$< Q(t) > = \frac{1}{2\pi}\int_t^{t+2\pi} Q(t)dt$$

Si $Q(t)$ varie trés peu à l'échelle d'une periode 2π, montrez que

$$< Q(t) > \approx Q(t)$$

$< \cos pt + i \sin pt > = 0$

(10) Montrez que $< \exp(ipt) >= 0$ pour $p \neq 0$

(11) Montrez que l'équation différentielle "moyennisée" pour B s'écrit

$$\dot{B} = f_{10} B + f_{21} |B|^2 B$$

ou $|B|^2 = B\bar{B}$.

(12) On introduit le module et la phase du nombre complexe $B = R\exp(i\theta)$. Montrez que les équations différentielles pour R et θ s'écrivent

$$\dot{R} = (\alpha + \beta R^2) R$$

$$\dot{\theta} = \gamma R^2$$

Calculer α, β et γ en fonction de ϵ, a et b.

(13) Tracez le graphe des solutions stationnaires du module R en fonction de ϵ pour $a < 0$ et $a > 0$.

(14) Quel est le rôle du paramètre b ? En particulier donnez l'interprétation physique de son signe.