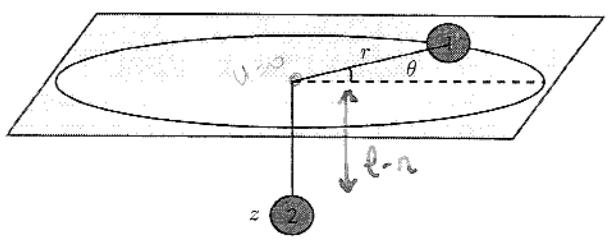
Université de Nice	2009-2010
Licence L3	

Dynamique non linéaire
Examen

1 Un plan, deux masses et une corde

On considère deux sphères de masse m_1 et m_2, que nous considérons ponctuelles. La masse 1, posée sur un plan horizontal, est attachée par une corde (de masse négligeable et de longueur l) inextensible qui passe par un trou du plan ($x = 0$, $y = 0$). De l'autre coté de ce support est attachée la masse 2 avec l'autre extrémité de la corde. On supposera que cette masse ne peut se déplacer que dans la direction verticale.



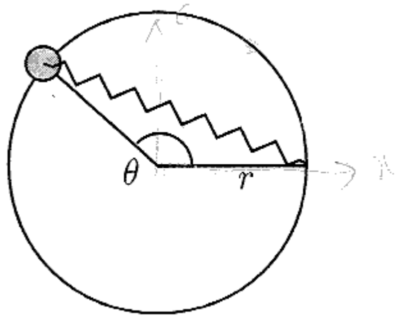
1. Quelle(s) approximations(s) sont-elles nécessaires pout assimiler les sphères à des points.
2. Trouver les coordonnées des deux masses en fonction de $r(t)$ et $\theta(t)$.
3. Calculer l'énergie cinétique du système.
4. Calculer l'énergie potentielle du système.
5. Ecrire les équations du mouvement.
6. Montrer qu'il existe deux quantités conservées. Que représentent-elles physiquement ?
7. Ecrire l'équation à laquelle obéit la coordonnée r, montrer qu'elle s'écrit sous la forme :

$$\ddot{r} = -\alpha + \frac{\beta}{r^3}$$

   on explicitera les coefficients α, β et
8. Ecrire la relation qui relie $\dot{r}$ à r. Dessiner l'énergie potentielle effective du système en fonction de r.
9. Esquisser le portrait de phase : $\dot{r}$ en fonction de r. Expliciter la dynamique du système.

2 Ressort comprimé sur un cercle

On considère une particule de dimension nulle et de masse m, libre de se mouvoir sur un cercle de rayon r. Cette particule est attaché à un ressort, dont l'autre extrémité est fixée à une partie du cercle. Le ressort a un longueur à l'équilibre l_0 et une constante de raideur k. On négligera les effets reliés à la pesanteur.



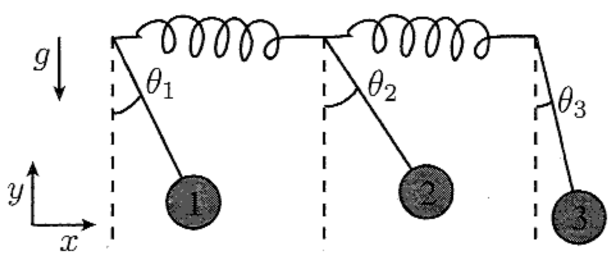
1. Donner les coordonnées de la masse m.
2. Calculer l'énergie cinétique et potentielle du système.
3. En déduire le Lagrangien du système.
4. Montrer que les équations du mouvements sont

$$\ddot{\theta} = f(\theta) \sin\theta,$$

   et l'on donnera fonction $f(\theta)$.
5. Trouver les points d'équilibre. Faire la distinction entre $2r < l_0$ et $2r > l_0$.
6. On suppose que $l_0 > 2r$. Calculer la fréquence d'oscillation autour de la position d'équilibre $\theta = \pi$.
7. On choisit un ressort tel que $l_0 = 0$. Dessiner le portrait de phase du système : $\dot{\theta}$ en fonction de θ.

3 Pendules couplés

On considère trois pendules couplés de même masse m, dont la tige est de masse négligeable et de longueur l.



Les trois pendules effectuent des oscillations dans le plan (y, z), qui est perpendiculaire à la feuille. Ces trois oscillateurs sont couplés par deux ressorts de torsion qui stockent de l'énergie potentielle sous la forme $\frac{k}{2}\Delta\theta^2$, avec $\Delta\theta$ défini comme la différence angulaire de deux tiges attachées au ressort (ex : $\Delta\theta = \theta_i - \theta_j$).

1. Ecrire le Lagrangien du système composé des trois masses et des deux ressorts.
2. Dériver les équations du mouvement pour les trois pendules.
3. On considère que les trois oscillateurs effectuent des petites oscillations : linéariser le système.
4. Chercher des solutions sous la formes $\theta_i(t) = \theta_i(0)e^{i\omega t}$.
   (a) Trouver les fréquences propres ω du système : on calculera α et β tel que

$$\omega^2 = \alpha^2, \omega^2 = \alpha^2 + 3\beta^2, \omega^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

   (b) Trouver les modes propres d'oscillations. Et décrire la dynamique du système.