$\frac{dV}{dx} = E$

Université de Nice-Sophia — Dynamique Non Linéaire (L2)

Examen du 30 Mai 2012

Durée : 2h00. La rédaction doit être précise et concise. On reportera les numéros des questions et sous-questions sur la copie d'examen. Aucun document n'est autorisé.

1 Oscillateur de van der Pol

L'étude de l'oscillateur de van der Pol a joué un rôle central dans le développement de la dynamique non linéaire. Ce système est analogue à circuit électrique RLC en série, où la résistance est remplacée par une diode. Ceci entraîne que la loi d'Ohm, $U = RI$ est remplacée par une relation non linéaire $U = Rf(I)$. Les équations du circuit s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} C\frac{dU}{dt} &= I \\ L\frac{dI}{dt} + Rf(I) + U &= V_0(t) \end{aligned}$$

où les variables (U, I) sont respectivement la tension aux bornes du condensateur, et l'intensité du courant circulant dans le circuit. En outre, V_0 est une tension variable délivrée dans le circuit par un générateur. Dans la suite on supposera que $K = dV_0/dt$ est une constante positive. De plus on supposera que la fonction $f(I)$ caractérisant la diode est donnée par :

$$f(I) = I(\frac{I^2}{3I_0^2} - 1)$$

1. Afin de montrer que ce circuit est un oscillateur non linéaire on souhaite remplacer le système d'équations ci-dessus par une seule équation différentielle du second ordre. Pour cela montrez qu'à partir du système initial on peut obtenir l'équation suivante :

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{df}{dI}\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = K \qquad (1)$$

2. Montrez que pour ce système on peut définir deux temps caractéristiques τ_L et τ_R.
3. Montrez que l'on peut adimensionner l'équation (1) sous la forme suivante :

$$\ddot{x} + \nu(x^2 - 1)\dot{x} + x = a \qquad (2)$$

où $\ddot{x}$ est la dérivée par rapport à la nouvelle unité de temps τ_L. L' équation obtenue dépend de 2 paramètres sans dimension (ν, a) qui seront précisés. Dans la suite on suppose que $\nu = 1$ et $a \geq 0$.

4. Réécrivez à présent cette équation différentielle comme un système dynamique à deux variables (x, y), avec $y = \dot{x}$ (et un seul paramètre a). Déterminez l'état stationnaire du système.
5. Ecrivez la matrice Jacobienne de ce système à l'état stationnaire.
6. Discutez la stabilité linéaire de l'état stationnaire dans chacun des domaines suivant du paramètre a : (i) $a > \sqrt{3}$. (ii) $1 < a < \sqrt{3}$. (iii) $0 \leq a < 1$. Dans chaque cas, dessinez qualitativement la position des valeurs propres dans le plan complexe, ainsi que le portrait de phase du système dynamique autour de l'état stationnaire.
7. Déterminez la valeur a_c de a pour laquelle on a une bifurcation de l'état stationnaire. De quelle bifurcation s'agit-il ? Quel type de comportement peut-on s'attendre à observer dans le circuit lorsque l'état stationnaire devient instable ?

2 Portrait de phase du pendule

On considère l'équation du pendule libre et non amorti :

$$\ddot{\theta} + \sin\theta = 0 \tag{3}$$

On s'intéresse à l'état stationnaire de ce système, de coordonnées égales à $\theta = \pi$ et $\dot{\theta} = 0$. (On note que, physiquement, le même état stationnaire peut être représenté par les coordonnées $\theta = -\pi$ et $\dot{\theta} = 0$.)

1. Réécrivez cette équation différentielle comme un système dynamique à deux variables (θ, ω), avec $\omega = \dot{\theta}$ Calculez la matrice Jacobienne du système à l'état stationnaire donné ci-dessus.
2. Calculez les valeurs propres de la matrice Jacobienne obtenue. Déduisez-en la stabilité et le type d'état stationnaire étudié.
3. On donne l'information suivante : les composantes des vecteurs propres de la matrice jacobienne sont $(1, 1)$ et $(1, -1)$.
   Dessinez l'état stationnaire et ses directions propres dans l'espaces des phases. Représentez qualitativement les trajectoires de l'espace des phases qui partent ou qui aboutissent à l'état stationnaire étudié. Comment appelle-t-on de telles trajectoires ? Pourquoi jouent-elles un rôle important dans la description de l'espace des phases du pendule libre ?
4. Complétez qualitativement le portrait de phase du pendule libre en nommant 2 classes de trajectoires périodiques possibles pour le pendule libre et non amorti.
5. *Question bonus.* On considère à présent le pendule libre et amorti. Que devient l'équation (3) ? Dessinez qualitativement comment les trajectoires issues de l'état stationnaire étudié plus haut, sont déformée en présence d'amortissement.