Université de Nice-Sophia | Dynamique Non Linéaire (L2)

Partiel du 13 mars 2012

Durée : 1h30. La rédaction doit être précise et concise. On reportera les numéros des questions et sous-questions sur la copie d'examen. Aucun document n'est autorisé.

1 Théorie des bifurcations

1. Analysez les états stationnaires du système dynamique donné par l'équation :
$$\dot{Z} = \mu - Z^2 \tag{1}$$
en fonction du paramètre μ.
Pour quelle valeur de μ a-t-on un point de bifurcation ? De quelle bifurcation s'agit-il ?
2. Déterminez par un calcul analytique la stabilité linéaire des états stationnaires obtenus.
3. Dessiner le diagramme de bifurcation complet des états stationnaires du système (1).
4. Montrez que lorsque μ est petit, le retour à l'équilibre d'une petite perturbation de l'état stationnaire stable, dénoté par exemple Z_+^*, se fait exponentiellement, avec un temps caractéristique proportionnel à $\mu^{-\frac{1}{2}}$. (Pour cela, poser $Z(t) = Z_+^* + \zeta(t)$, en supposant ζ petit.)

$\mu' + \mu =$ sols e^{-t}

2 Culture de bactéries

On considère la dynamique d'une population de bactéries décrite par l'équation logistique (modifiée) :
$$\frac{dn}{dt} = \beta n(1 - \frac{n}{C}) - B \tag{2}$$

$n - \frac{n^2}{C} -$

1. Dans l'équation (2), $n(t)$ est le nombre de bactéries (positif ou nul) à l'instant t ; déduisez-en les dimensions des paramètres β, C et B. (paramètres réels positifs).
Quelle est l'interprétation du paramètre B ?
2. Montrez qu'il existe un temps caractéristique et un nombre de bactéries caractéristique qui permettent d'adimensionner le temps et le nombre de bactéries, permettant de simplifier l'équation d'évolution du système sous la forme :
$$\dot{z} = z(1 - z) - r \tag{3}$$

$\frac{1}{\tau}$

où $\dot{z}$ est la dérivée temporelle du nombre de bactéries (adimensionné) par rapport au temps adimensionné.

Précisez l'expression du paramètre r en fonction de B, β et C.

3. Montrez que dans l'équation (3) on peut effectuer un changement de variables de la forme $z = Z + b$, et choisir une valeur numérique de b telle que l'équation d'évolution devienne l'équation (1), où μ est une fonction de r que l'on précisera.

3 Culture de bactéries et théorie des bifurcations

1. En vous aidant du diagramme de bifurcation dessiné au point 3 de la partie 1, représentez le diagramme de bifurcation des états stationnaires du système (3) en fonction de r.
2. Déterminez le domaine $[0, r_{max}]$ des valeurs permises de r pour lequel il est possible d'extraire des bactéries dans la population tout en conservant un état stationnaire stable.

   Que se passe-t'il pour une condition initiale donnée $z(0) > 0$, si $r > r_{max}$? Interprétez le résultat en termes de cultures de bactéries.
3. A.N. Supposons que $\beta = 1$ min^{-1}, et $C = 3\ 10^6$ bactéries. Dans ce cas, quel est le taux maximum de bactéries que l'on peut prélever par minute dans la population, sans conduire à son extinction ?