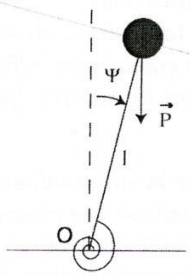
Université de Nice
Licence – L2

Mai 2011

Dynamique non linéaire

Partiel final

1 – Pendule inversé



On considère un *pendule inversé* constitué d'une masse m attachée à l'extrémité d'une tige de longueur l, l'autre extrémité étant maintenue en un point fixe O autour duquel la tige peut tourner. Le moment d'inertie du pendule par rapport au point O est noté I. On désigne par Ψ l'angle de la tige par rapport à la direction verticale ($\Psi = 0$ correspondant à la masse m située à la hauteur l *au-dessus* du point O). Un ressort à torsion, de constante de raideur $k > 0$, exerce un moment de force de rappel sur la tige. Ce moment de force, de norme $|k\Psi|$, s'oppose au moment de force dû au poids du pendule. On suppose enfin que le pendule est soumis à un moment de force de frottement visqueux (de norme $|\gamma d\Psi/dt|$).

a. Ecrivez l'équation fondamentale de la dynamique de ce pendule $Id^2\Psi/dt^2 = \cdots$.

b. Pour adimensionner cette équation différentielle, on divise chacun de ses termes par le facteur qui multiplie $\sin\Psi$ dans cette équation. Montrez qu'en choisissant une échelle de temps appropriée on peut réécrire l'équation fondamentale de la dynamique avec deux paramètres sans dimension : le premier, noté ν, est le facteur qui multiplie $\dot{\Psi}$ (dérivée de Ψ par rapport au temps adimensionné) ; le second, noté c, est le facteur qui multiplie Ψ.

c. Réécrivez l'équation dynamique en ayant effectué un développement limité à l'ordre 3 de la fonction $\sin\Psi$. Démontrez que le changement de variable $\Psi = \sqrt{6}x$ permet d'écrire finalement l'équation du pendule sous la forme normale :

$$\ddot{x} + \nu\dot{x} = rx - x^3$$

où le paramètre r est relié à c par $r = 1 - c$. Quelle est le domaine de valeurs physiques de r ?

d. Montrez que l'on peut écrire l'équation du pendule adimensionnée sous la forme d'un système dynamique à deux variables :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2)\\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

où $f_1(x_1, x_2) = x_2$ et $f_2(x_1, x_2) = rx_1 - x_1^3 - \nu x_2$. Calculez la matrice jacobienne $\mathbf{J}$ de ce système en un point d'équilibre quelconque, que l'on notera (x_1^*, x_2^*). Déduisez-en la somme S et le produit P de ses valeurs propres.

Rappelez les conditions sur S et P qui garantissent que le point d'équilibre est un attracteur du système. Donnez également la condition telle que les racines soient réelles.

e. ~~On suppose $\nu > 0$. Discutez la stabilité linéaire de l'état stationnaire $(0,0)$ en fonction des~~ valeurs possibles de r. Dans le cas où cet état stationnaire est stable précisez le domaine des valeurs de ν pour lequel il s'agit d'un *foyer stable*, et le domaine pour lequel il s'agit d'un *noeud stable.*
Lorsque $(0,0)$ devient instable comment appelle-t-on le type d'état stationnaire correspondant ?

f. Lorsque $r \geq 0$ il existe deux autres états stationnaires différents de $(0,0)$, à savoir $(\sqrt{r},0)$ et $(-\sqrt{r},0)$. Discutez leur propriété de stabilité linéaire.

g. Dessinez le diagramme de bifurcation des états stationnaires en fonction de r en notant le point de bifurcation. Quelle est cette bifurcation ?
Dessinez ensuite le diagramme de bifurcation en fonction du paramètre c, défini plus haut au point **b.** A l'aide de ce diagramme commentez brièvement l'évolution de l'angle d'équilibre du pendule lorsque la raideur du ressort de torsion diminue, en partant d'une valeur $k = 2mgl$ et en diminuant jusqu'à $k = 0$.

h. A partir de maintenant on considère la situation où $\nu = 0$. Quelle propriété physique le système acquière avec cette égalité ? Comment cela se répercute-t-il sur la matrice Jacobienne ?
De plus on suppose $0 < r < 1$. Discutez dans ce cas les propriétés de stabilité des états stationnaires $(0,0)$ et des deux autres états stationnaires dépendant de r.
Tracez dans l'espace des phases (le plan des variables (x_1, x_2)) le portrait de phase local autour des 3 états stationnaires du système. Proposez finalement des trajectoires possibles pour compléter le portrait de phase globalement.

2 – Pendule forcé et amorti

Le pendule forcé et amorti peut être décrit par une équation adimensionnée de la façon suivante :

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + \sin x = \gamma$$

où β et γ sont des paramètres sans dimension qui décrivent respectivement la viscosité et l'intensité du moment de force constant appliqué au pendule.
D'autre part le diagramme de phases de ce système est représenté sur la figure ci-dessous.

a. Décrivez le comportement du pendule lorsque les paramètres sont choisis dans chacune des régions A, C et B.

b. A l'aide de ce diagramme, expliquer brièvement le phénomène d'hystérèse que l'on peut observer avec le pendule forcé et amorti.