Université de Nice
Licence – L2

Mai 2010

Dynamique non linéaire

Partiel final

1 – Bifurcation associée à l'extinction d'une espèce vivante

On considère l'équation logistique :

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N(1 - \frac{N}{K}) \tag{1}$$

Cette équation est utilisée pour décrire la croissance du nombre d'individus N d'une espèce vivante dont les ressources sont limitées.

a. En utilisant une approche géométrique qualitative effectuez une analyse des états stationnaires de ce système ainsi que de leur stabilité.

b. Donnez une interprétation des paramètres α et K.

c. Montrez qu'un changement de variable sur N et t permet d'écrire l'équation (1) sous la forme (adimensionnée) suivante :

$$\dot{x} = x(1 - x)$$

où x représente la variable N adimensionnée et $\dot{x}$ sa dérivée par rapport au temps adimensionné.

d. On suppose que l'espèce vivante en question est "chassée" ou "pêchée" à un rythme de $-\beta N$ individus par unité du temps t. Montrez que sous cette hypothèse l'équation adimensionnée prend la forme suivante :

$$\dot{x} = x(1 - x) - rx \tag{2}$$

où $r = \beta/\alpha$.

e. Rappelez brièvement le principe du calcul de stabilité linéaire. Appliquez ce principe à l'étude de la stabilité linéaire de l'état stationnaire $x^* = 0$ de l'équation (2) lorsque : (i) $r = 1/2$ et lorsque (ii) $r = 2$.

f. Déterminez l'état stationnaire non nul de l'équation (2) . Pour quelle valeur de r a-t-on une bifurcation ? De quelle type de bifurcation s'agit-il ? Représentez le diagramme de bifurcation des états stationnaires de ce système dynamique en fonction de r. Ajoutez-y des flèches qualitatives décrivant la stabilité des états stationnaires.

g. Quelle est l'interprétation "biologique" de ce diagramme de bifurcation ?

2 – Instabilité d'une carène parabolique

On considère un objet ayant la forme d'une carène de bateau de section parabolique, de hauteur $H = 1$ et de largeur $L = 2$. L'objet est posé verticalement sur le sol comme représenté sur la Figure 1. Un système de coordonnées cartésiennes (X, Y) est associé à la carène. On suppose que son centre de gravité est situé au point de coordonnées (X_G, Y_G). Dans un premier temps on considère que $X_G = 0$ et $Y_G = 3/5$ (cas d'une carène dont la répartition de masse est homogène). Dans ce cas on peut montrer que la position d'équilibre "verticale" de la carène, représentée sur la figure, est instable mais qu'il existe deux autres positions d'équilibre pour lesquelles l'axe de symétrie de la carène est incliné par rapport à la direction verticale. Les étapes suivantes permettent de le prouver :

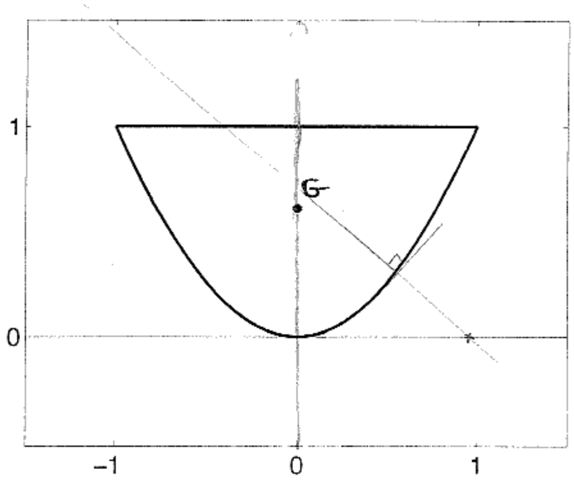

FIGURE 1 – Carène parabolique posée verticalement sur un plan horizontal

a. Préciser la valeur de a dans l'équation paramétrique de la parabole : $\begin{cases} x(s) = s \\ y(s) = as^2 \end{cases}$. Déterminer ensuite l'équation cartésienne (dans les coordonnées X, Y) de la *droite normale* à la parabole au point de coordonnées $(x(s), y(s))$.

b. Soit un point de coordonnées (X, Y) sur la Figure 1. Déterminer l'équation cubique, dans la variable s, dont les solutions correspondent aux abscisses des points de la parabole dont les normales passent par (X, Y).

c. Pourquoi, dans une position d'équilibre de la carène parabolique reposant sur le sol, la droite verticale passant par le centre de gravité **G** est-elle également une droite normale à la parabole issue de son point de contact **A** avec le sol ?

equa du pt b:

d. En utilisant l'équation obtenue au point précédent montrez que, lorsque $X_G = 0$ et $Y_G = 3/5$, il existe 3 positions d'équilibre dont : la position d'équilibre vertical et deux autres positions d'équilibre pour lesquelles l'axe de symétrie de la carène est incliné par rapport à la direction verticale. Dessinez la carène parabolique lorsque celle-ci a basculé vers la gauche.

e. On considère une position d'équilibre initiale où la carène est inclinée vers la gauche, comme dessiné au point précédent. Supposons que l'on modifie progressivement la répartition des masses dans la carène de sorte que les coordonnées du centre de masse se déportent vers la partie droite de la carène : on suppose que, dans le système de coordonnées de la Fig.1, X_G augmente petit-à-petit et Y_G reste constant, $Y_G = 3/5$.
Dans cette situation, pour quelle valeur critique X_c de $X_G > 0$ la carène va-t-elle brusquement basculer vers la droite ? De quel type de bifurcation s'agit-il ?