Université de Nice
Licence – L2

Avril 2011

Dynamique non linéaire

Partiel

1 – Un système non linéaire bien connu en mécanique

Un des exemples mécaniques le plus simple de système non linéaire est le pendule. On considère une masse m attachée à une tige rigide de longueur l et dont l'autre extrémité est fixée à un axe de rotation plan. On suppose que le système peut osciller librement et sans frottement. On pourra noter I le moment d'inertie du pendule par rapport à son axe de rotation.

a. Etablissez l'équation différentielle qui régit ce système dynamique.

b. Obtenez un temps caractéristique pour le pendule.

c. Eliminez tous les paramètres physiques (I, l, g, m) par adimensionnement de l'équation différentielle.

d. Montrez explicitement que ce système dynamique est non linéaire.

e. Quelle est la dimension de l'espace des phases de ce système dynamique ? Montrez que l'on peut écrire l'équation différentielle du pendule sous la forme de 2 équations du premier ordre couplées.

2 – Etude de stabilité linéaire et bifurcation

On considère le système dynamique suivant, issu de la théorie simplifiée des lasers :

$$\frac{dn}{dt} = a\frac{n}{K+n} - kn$$

Dans cette équation n représente un nombre photons et (a, K, k) sont des paramètres réels et positifs.

a. Montrez que le changement de variable $x = n/K$ et $\tilde{t} = kt$ dans l'équation ci-dessus permet d'obtenir l'équation simplifiée :

$$\dot{x} = r\frac{x}{1+x} - x$$

où $\dot{x}$ est la dérivée par rapport au temps adimensionné $\tilde{t}$. Le paramètre r est une combinaison des autres paramètres (a, K, k). Laquelle ?

b. Déterminez les états stationnaires du système dynamique simplifié. On obtiendra un état stationnaire qui ne dépend pas de r, soit x_1^*, et un état stationnaire qui en dépend, soit $x^*(r)$.

c. Pour un système dynamique général $\dot{x} = f(x)$, rappelez le critère de stabilité linéaire d'un état stationnaire x^*, que l'on déduit du calcul de la dérivée $\frac{df}{dx}(x^*)$.

d. En utilisant le critère de stabilité linéaire rappelé au point précédent, discutez la stabilité de l'état stationnaire x_1^* suivant les valeurs de r. Que peut-on dire en $r = 1$?

e. Même question pour $x^*(r)$.

f. Représentez un graphe dans lequel sont dessinés x_1^* et $x^*(r)$ en fonction du paramètre r, en indiquant en traits continus les états stationnaires stables et en traits discontinus les états stationnaires instables.
Comment appelle-t-on un tel graphe ?
De quelle bifurcation s'agit-il ?