Université de Nice
Licence – L2

Avril 2010

Dynamique non linéaire

Contrôle continu n° 2

1 – Bifurcation noeud-col

L'équation d'un système dynamique non linéaire est supposée être de la forme suivante :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = \epsilon + \alpha x^2 + \beta x^3 \tag{1}$$

avec $\alpha, \beta > 0$ et ϵ un paramètre réel.

a. On considère le changement de variable $y = ax$. Ecrire l'équation différentielle donnée ci-dessus dans la variable y. Préciser ensuite la valeur de a qui permet d'écrire l'équation différentielle sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha|\epsilon|}}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{\sqrt{\alpha|\epsilon|}}\frac{dy}{dt} = \sigma + y^2 + \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\frac{|\epsilon|}{\alpha}}\,y^3 \tag{2}$$

où $\sigma = 1$ si $\epsilon > 0$, et $\sigma = -1$ si $\epsilon < 0$.

b. Déterminer un changement d'échelle de temps $\tilde{t} = t/\tau$, avec le paramètre τ dépendant de ϵ, qui permet, dans la limite où l'on néglige $|\epsilon| \ll 1$, d'écrire l'équation différentielle en y sous la *forme normale* :

$$\dot{y} = \sigma + y^2$$

(Dans cette équation la dérivée par rapport à $\tilde{t}$ est notée comme $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$).

c. Discutez succinctement le phénomène de bifurcation noeud-col à partir de la forme normale et tracez le diagramme de bifurcation.

$\tilde{t} = t/\tau$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\tilde{t}}\,\frac{d\tilde{t}}{dt} = \dot{y}\,\frac{1}{\tau}$$

$$\frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{d\dot{y}}{d\tilde{t}}\,\frac{d\tilde{t}}{dt} = \ddot{y}\,\frac{1}{\tau}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}\,\frac{1}{\tau^2}$$