Examen de Relativité

15 juin 2009 – session de rattrapage

Création d'une paire électron-positron

On considère la collision de deux photons de même énergie E_0 et d'impulsions opposées. On suppose que cette collision donne lieu à la création d'une seule paire électron-positron (e^-, e^+) .

1. En utilisant la conservation du 4-vecteur énergie-impulsion total, justifiez le fait que les deux particules créées, e^- et e^+, doivent posséder la même énergie. On appellera celle-ci E.

2. En utilisant la conservation de l'énergie au cours de la collision, déterminez l'énergie seuil que doit posséder chaque photon avant la collision pour créer la paire (e^-, e^+) ? On rappelle que l'électron et le positron ont la même masse, correspondant à $mc^2 = 0.511\,\mathrm{MeV}$.

3. À l'aide de la constante de Planck $h = 4 \times 10^{-15}\,\mathrm{eV.s}$, calculez la fréquence et la longueur d'onde des photons possédant l'énergie seuil estimée au point précédent.

4. On suppose que l'énergie des photons incidents est $E_0 = 5/8\,\mathrm{MeV}$. Quelle est l'énergie de l'électron créé ?

5. Exprimez le rapport v/c de l'électron créé.

6. Calculer l'énergie cinétique relativiste T de l'électron créé.

7. Calculer la vitesse v'/c de l'électron dans le référentiel où le positron est au repos.

8. Dans ce même référentiel, calculez l'énergie totale E' et l'énergie cinétique T' de l'électron.

Champ électrique mesuré dans différents référentiels

Un condensateur est constitué de deux plateaux rectangulaires, de côtés a et b, distants de h et portant la densité superficielle de charges σ. Les palteaux sont parallèles au plan xOy. On suppose les rapports h/a et $h/b \ll 1$ de façon à ce que le champ électrique $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_\perp \hat{z}$ soit uniforme entre les plateaux.

1. Quelle est l'expression du champ électrique $\mathcal{E}_\perp$ régnant entre les plateaux, en supposant que le diélectrique est le vide ?

2. Un référentiel $(\mathcal{R}')$ se déplace à la vitesse $\vec{v} = (v, 0, 0)$ par rapport au référentiel $(\mathcal{R})$ lié aux plateaux du condensateur.

De l'invariance de la charge totale, déduisez la densité de charge σ' portée par les plateaux dans le repère $(\mathcal{R}')$. Exprimez le champ électrique $\vec{\mathcal{E}}\,' = \mathcal{E}'_\perp \hat{z}$ mesuré dans $(\mathcal{R}')$ en fonction de $\mathcal{E}$.

3. On considère maintenant un condensateur identique au précédent mais ayant des plateaux parallèles au plan yOz. Exprimez la densité de charges σ'' mesurée dans le repère $(\mathcal{R}')$ et en déduire l'expression du champ $\vec{\mathcal{E}}\,' = \mathcal{E}'_{//} \hat{z}$.

4. En utilisant les résultats des questions **2.** et **3.**, établissez les formules de transformation du champ électrique :

$$\mathcal{E}'_{//} = \mathcal{E}_{//} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{E}'_\perp = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\,\mathcal{E}_\perp$$

Invariance de la charge

Dans un référentiel $(\mathcal{R})$ des charges occupent, avec la densité ρ, le volume Ω ; la charge totale contenue dans le volume est q. Les charges se déplacent à la vitesse uniforme et constante $\vec{V} = (V, 0, 0)$. Un référentiel $(\mathcal{R}')$ est animé d'un mouvement de translation uniforme à la vitesse $\vec{v} = (v, 0, 0)$ par rapport à $(\mathcal{R})$.

1. En utilisant la loi de transformation du quadri-vecteur courant J_μ, établissez les relations suivantes :

$$\rho' = \frac{1 - \dfrac{vV}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\,\rho \quad ; \qquad V' = \frac{V - v}{1 - \dfrac{vV}{c^2}} \tag{1}$$

Reconnaissez dans l'expression de V' la loi de composition des vitesses vue en cinématique relativiste. Rappelez son établissement.

2. Pouvez-vous invoquer la règle de contraction des longueurs pour déduire directement de Ω le volume Ω' occupé par les charges dans $(\mathcal{R}')$? En introduisant le volume Ω_0 occupé par les charges dans le référentiel où elles sont au repos, obtenez l'expression de Ω' en fonction de Ω ?

3. Déduisez de ce qui précède que la charge est un invariant relativiste : $q' = q$.