EXAMEN PARTIEL DE RELATIVITÉ N°3

17 mai 2011 – durée : 3 heures

Variations autour de l'effet Doppler

A. Approche « cinématique »

Une source S placée à l'origine O du référentiel d'inertie $(\mathcal{R})$ émet des éclairs lumineux avec une période T. Un observateur est placé à l'origine O' du référentiel $(\mathcal{R}')$ s'éloignant de O avec une vitesse horizontale et de module V constant. À l'origine des temps, O et O' coïncident ; S émet régulièrement des éclairs aux temps $t_1 = 0$, $t_2 = T$ et $t_3 = 2T$.

1. Faites un schéma pour représenter la situation. Déterminez quels sont, pour l'observateur placé en O' :
- les temps d'émission t'_1, t'_2 et t'_3 de ces éclairs ;
- les positions de S lors de ces émissions ;
- les temps τ'_1, τ'_2 et τ'_3 de réception de ces éclairs.

2. Établissez l'expression de la période T' mesurée par l'observateur placé en O' en fonction de T et $\beta = V/c$. Exprimez la relation pour les pulsations correspondantes, ω' et ω.

B. Invariance de la phase

Les grandeurs (composantes du champ, du potentiel vecteur, le potentiel) associées à une onde électromagnétique se propageant dans le vide vérifient l'équation de propagation :

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\right)\psi(\vec{r},t) = 0 \qquad (1)$$

1. Vérifiez que toute fonction du type $\psi(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})$ est solution de l'équation (1), à la condition que

$$\vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \qquad (2)$$

La relation (2) constitue la forme la plus simple des *relations de dispersion* qui relient le vecteur d'onde et la pulsation.

2. L'équation (1) décrit une loi physique qui, d'après le principe de relativité, doit être vraie dans tous les référentiels d'inertie. Quelle en est la conséquence sur la quantité $\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}$, qui constitue la *phase* de l'onde ?

3. Pouvez-vous interprétez la phase de l'onde comme le pseudo-produit scalaire de 2 quadri-vecteurs ? Si oui, lesquels ?

C. Approche « ondulatoire »

Une source électromagnétique, placée en O, émet une onde sinusoïdale à l'instant $t = t' = 0$ où O et O' coïncident. Un observateur A, immobile dans $(\mathcal{R}')$, mesure dans $(\mathcal{R})$ au temps t la réception du signal de pulsation ω et un vecteur d'onde $\vec{k}$. Il constate que le vecteur d'onde fait un angle θ avec l'axe des x. Dans $(\mathcal{R}')$, il mesure les quantités ω', $\vec{k}'$ et θ'.

1. Faites un schéma pour représenter la situation.

2. En utilisant l'invariance de la phase, montrez que :

$$\omega(x\cos\theta + y\sin\theta - ct) = \omega'(x'\cos\theta' + y'\sin\theta' - ct') \tag{3}$$

3. À partir de la relation (3), établissez les trois relations suivantes :

$$\begin{aligned} \omega\gamma(\cos\theta - \beta) &= \omega'\cos\theta' && (4)\\ \omega\sin\theta &= \omega'\sin\theta' && (5)\\ \omega\gamma(1-\beta\cos\theta) &= \omega' && (6) \end{aligned}$$

Rappelez les transformations de Lorentz du 4-vecteur $\underline{k} = (\omega/c, \vec{k})$ et retrouvez directement les relations précédentes.

4. À l'aide de (6), écrivez, pour un observateur situé sur l'axe Ox, les expressions de l'effet Doppler lorsque la source se dirige vers lui, et lorsque la source s'éloigne de lui. Comparez avec le résultat de la partie **A**.

D. Double effet Doppler : réflexion sur un miroir en mouvement

On considère dans le référentiel $(\mathcal{R})$ une onde plane se dirigeant dans le sens des x croissants :

$$\psi(x,t) = A\sin(\omega t - kx) \tag{7}$$

Cette onde se réfléchit sur un miroir perpendiculaire à Ox et animé d'un mouvement de translation uniforme à vitesse $\vec{V} = (V, 0, 0)$.

1. Faites un schéma pour représenter la situation.

2. En utilisant les résultats concernant l'effet Doppler, montrez que la pulsation ω_r et le vecteur d'onde $\vec{k}_r$ de l'onde réfléchie sont données par :

$$\omega_r = \frac{1-\beta}{1+\beta}\,\omega \quad \text{et} \quad \vec{k}_r = -\frac{1-\beta}{1+\beta}\,\vec{k} \tag{8}$$

Suggestion : raisonnez d'abord dans le référentiel lié au miroir, puis dans celui lié à la source, c'est-à-dire $(\mathcal{R})$.

3. Le miroir est maintenant incliné à 45 ° sur l'axe des x. Faites un schéma pour représenter la situation. Calculez la pulsation ω' et le vecteur d'onde $\vec{k}'$ de l'onde incidente dans le référentiel $(\mathcal{R}')$ lié au miroir.

4. Calculez, dans $(\mathcal{R}')$, la pulsation ω'_r et le vecteur d'onde $\vec{k}'_r$ de l'onde réfléchie. Exprimez alors les quantités correspondantes dans le référentiel $(\mathcal{R})$. Quelle relation existe-t-il entre ω_r et $\vec{k}_r$? Commentez vos résultats.