Université de Nice-Sophia Antipolis – Licence 2ᵉannée SM/MP
Physique

Examen de Relativité

25 mai 2010

Création d'une paire électron-positron

On considère la collision de deux photons de même énergie E_0 et d'impulsions opposées. On suppose que cette collision donne lieu à la création d'une seule paire électron-positron (e^-, e^+) .

1. En utilisant la conservation du 4-vecteur énergie-impulsion total, justifiez le fait que les deux particules créées, e^- et e^+, doivent posséder la même énergie. On appellera celle-ci E.

2. En utilisant la conservation de l'énergie au cours de la collision, déterminez l'énergie seuil que doit posséder chaque photon avant la collision pour créer la paire (e^-, e^+) ? On rappelle que l'électron et le positron ont la même masse, correspondant à $mc^2 = 0.511\,\text{MeV}$.

3. À l'aide de la constante de Planck $h = 4 \times 10^{-15}\,\text{eV.s}$, calculez la fréquence et la longueur d'onde des photons possédant l'énergie seuil estimée au point précédent. = 0,675 MeV.

4. On suppose que l'énergie des photons incidents est $E_0 = 5/8\,\text{MeV}$. Quelle est l'énergie de l'électron créé ?

5. Exprimez le rapport v/c de l'électron créé.

6. Calculer l'énergie cinétique relativiste T de l'électron créé.

7. Calculer la vitesse v'/c de l'électron dans le référentiel où le positron est au repos.

8. Dans ce même référentiel, calculez l'énergie totale E' et l'énergie cinétique T' de l'électron.

Champ électrique mesuré dans différents référentiels

Un condensateur est constitué de deux plateaux rectangulaires, de côtés a et b, distants de h et portant la densité superficielle de charges σ. Les palteaux sont parallèles au plan xOy. On suppose les rapports h/a et $h/b \ll 1$ de façon à ce que le champ électrique $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_\perp \hat{z}$ soit uniforme entre les plateaux.

1. Quelle est l'expression du champ électrique $\mathcal{E}_\perp$ régnant entre les plateaux, en supposant que le diélectrique est le vide ?

2. Un référentiel $(\mathcal{R}')$ se déplace à la vitesse $\vec{v} = (v, 0, 0)$ par rapport au référentiel $(\mathcal{R})$ lié aux plateaux du condensateur.

De l'invariance de la charge totale, déduisez la densité de charge σ' portée par les plateaux dans le repère $(\mathcal{R}')$. Exprimez le champ électrique $\vec{\mathcal{E}}' = \mathcal{E}'_\perp \hat{z}$ mesuré dans $(\mathcal{R}')$ en fonction de $\mathcal{E}$.

3. On considère maintenant un condensateur identique au précédent mais ayant des plateaux parallèles au plan yOz. Exprimez la densité de charges σ'' mesurée dans le repère $(\mathcal{R}')$ et en déduire l'expression du champ $\vec{\mathcal{E}}' = \mathcal{E}'_{//} \hat{z}$.

4. En utilisant les résultats des questions **2.** et **3.**, établissez les formules de transformation du champ électrique :

$$\mathcal{E}'_{//} = \mathcal{E}_{//} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{E}'_\perp = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\,\mathcal{E}_\perp = \gamma\, \mathcal{E}_\perp$$

Densités linéaires de charges

Deux fils infinis et parallèles portent respectivement des charges ponctuelles positives et négatives, régulièrement espacées, comme représenté sur le figure 1. On note $\lambda_0 = q/a$.

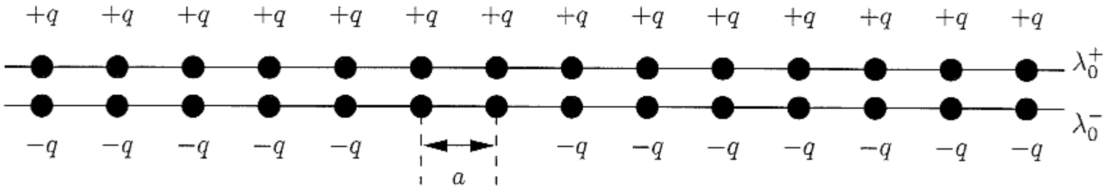

FIGURE 1 – Deux fils infinis portant des densités de charge de signes opposés.

1. On considère la situation où les deux fils sont **immobiles** l'un par rapport à l'autre, et on se place dans le référentiel lié aux fils.

a. Donnez les expressions des densités linéaires de charge respectives des deux fils, λ_0^+ et λ_0^-, en fonction de λ_0.

b. Quelle est la densité linéaire de charge globale Λ_0 de l'ensemble des deux fils ? Quel est le champ électrique $\vec{E}$ résultant (on suppose les deux fils suffisamment proches pour négliger les termes dipolaires) ?

c. Quelle est la valeur de la densité de courant associée à ces charges ? Que vaut le champ magnétique $\vec{B}$ résultant ?

2. On se place maintenant dans un référentiel $(\mathcal{R})$ où les deux fils sont **en mouvement** : le fil portant les charges positives se déplace à la vitesse $\vec{u} = (u, 0, 0)$, celui portant les charges négatives, à la vitesse $-\vec{u}$ (voir figure 2.). On définit la rapidité φ par $\tanh \varphi = u/c$.

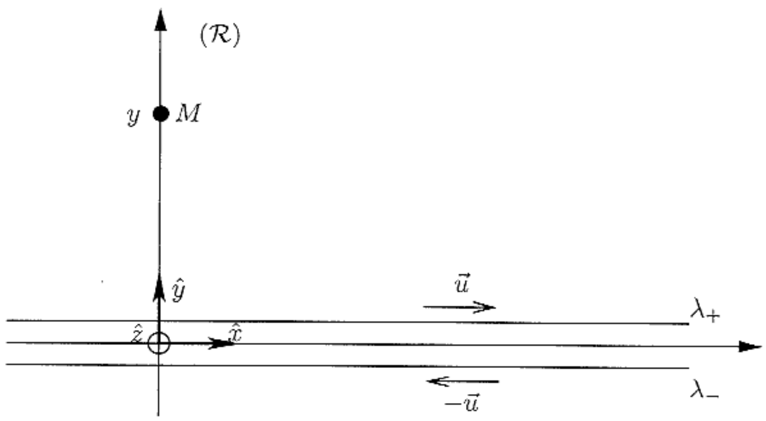

FIGURE 2 – Les deux fils chargés en mouvement.

a. Exprimez, en fonction de φ, la distance d'espacement entre les charges dans $(\mathcal{R})$.

b. Exprimez, en fonction de φ et de λ_0, les densités de charge λ_+ et λ_- dans $(\mathcal{R})$. Quelle est la valeur de la densité linéaire de charge de l'ensemble des deux fils Λ ? Donnez la valeur du champ électrique résultant $\vec{E}(y)$ créé au point $M(0, y, 0)$ (on néglige toujours les termes dipolaires).

c. Établissez les expressions respectives des vecteurs densités de courant $\vec{j}_+$ et $\vec{j}_-$ associés à chacun des fils en mouvement. Précisez leurs directions respectives, et écrivez les expressions de leurs coordonnées horizontales j_+ et j_-, en fonction de φ et de λ_0.

d. Quelle est l'expression de la coordonnée horizontale j de la densité de courant globale ? Donnez l'expression du champ magnétique résultant au point M.

2/2

e. Une particule, de charge Q, de masse $m = 140\,\mathrm{MeV}/c^2$ se déplace horizontalement avec une impulsion de module $p = 300\,\mathrm{MeV}/c$. Quelle est son énergie cinétique T ? le module de sa vitesse v_1 ?
Cette particule passe au point M avec le vecteur vitesse $\vec{v}_1 = (v_1, 0, 0)$. Donnez l'expression de la force électromagnétique $\vec{F}$ qui s'exerce sur elle dans $(\mathcal{R})$.

3. On se place maintenant dans le référentiel $(\mathcal{R}')$ lié à la particule chargée, la charge Q y est donc **immobile**. Le référentiel $(\mathcal{R}')$ est animé de la vitesse $\vec{v}_1$ par rapport à $(\mathcal{R})$. On définit la rapidité φ_1 par $\tanh\varphi_1 = v_1/c$.

a. Montrez que les rapidités respectives des charges $+q$ et $-q$ dans $(\mathcal{R}')$ s'écrivent

$$\varphi'_+ = \varphi - \varphi_1 \quad \text{et} \quad \varphi'_- = -\varphi - \varphi_1$$

b. Écrivez les expressions de λ'_+ et λ'_-, les densités linéaires de charge dans $(\mathcal{R}')$, en fonction de λ_0, φ et φ_1.

c. Quelle est la densité de linéaire de charge globale Λ' ? Quelle est l'expression résultante du champ électrique $\vec{E}\,'(y)$ s'exerçant sur la charge Q au point M ? Celle de la force électromagnétique $\vec{F}\,'$?

d. Les expressions de la force électromagnétique obtenues dans la question précédente et dans la question **2.e** sont différentes. Établissez la relation générale qui relie les coordonnées F_y et F'_y de la force s'exerçant respectivement dans $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{R}')$ sur une charge **immobile** dans $(\mathcal{R}')$. Vérifiez que les expressions obtenues en **3.c** et **2.e** sont liées par cette relation.

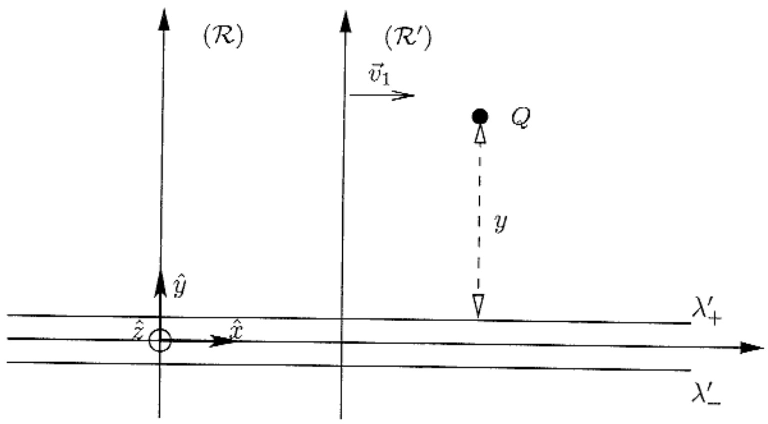

FIGURE 3 – Charge dans le champ généré par les deux fils en mouvement.

Rappels :

Un fil infini situé sur l'axe $O\cancel{x}$ portant une densité linéaire de charge λ et une densité de courant $\vec{\jmath} = j\hat{x}$ crée au un point M les champs électrique et magnétique suivants :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0\, y}\,\hat{y}, \qquad \vec{B} = \frac{\mu_0 j}{2\pi\, y}\,\hat{z}$$