Partiel de Relativité

5 mai 2009

Partie A

Deux fils infinis et parallèles portent respectivement des charges ponctuelles positives et négatives, régulièrement espacées, comme représenté sur le figure 1. On note $\lambda_0 = q/a$.

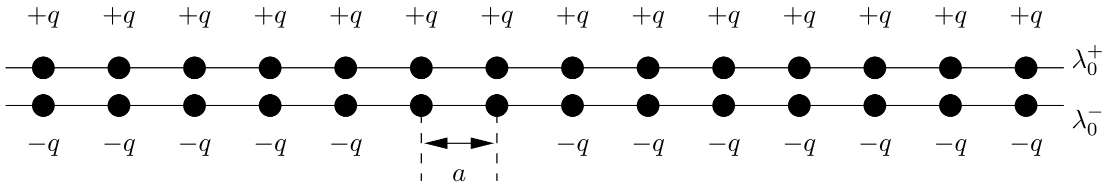

Fig. 1 – Deux fils infinis portant des densités de charge de signes opposés.

1. On considère la situation où les deux fils sont **immobiles** l'un par rapport à l'autre, et on se place dans le référentiel lié aux fils.

a. Donnez les expressions des densités linéaires de charge respectives des deux fils, λ_0^+ et λ_0^-, en fonction de λ_0.

b. Quelle est la densité linéaire de charge globale Λ_0 de l'ensemble des deux fils ? Quel est le champ électrique $\vec{E}$ résultant (on suppose les deux fils suffisamment proches pour négliger les termes dipolaires) ?

c. Quelle est la valeur de la densité de courant associée à ces charges ? Que vaut le champ magnétique $\vec{B}$ résultant ?

2. On se place maintenant dans un référentiel $(\mathcal{R})$ où les deux fils sont **en mouvement** : le fil portant les charges positives se déplace à la vitesse $\vec{u} = (u, 0, 0)$, celui portant les charges négatives, à la vitesse $-\vec{u}$ (voir figure 2.). On définit la rapidité φ par $\tanh\varphi = u/c$.

a. Exprimez, en fonction de φ, la distance d'espacement entre les charges dans $(\mathcal{R})$.

b. Exprimez, en fonction de φ et de λ_0, les densités de charge λ_+ et λ_- dans $(\mathcal{R})$. Quelle est la valeur de la densité linéaire de charge de l'ensemble des deux fils Λ ? Donnez la valeur du champ électrique résultant $\vec{E}(y)$ créé au point $M(0, y, 0)$ (on néglige toujours les termes dipolaires).

c. Établissez les expressions respectives des vecteurs densités de courant $\vec{j}_+$ et $\vec{j}_-$ associés à chacun des fils en mouvement. Précisez leurs directions respectives, et écrivez les expressions de leurs coordonnées horizontales j_+ et j_-, en fonction de φ et de λ_0.

d. Quelle est l'expression de la coordonnée horizontale j de la densité de courant globale ? Donnez l'expression du champ magnétique résultant au point M.

e. Une particule, de charge Q, de masse $m = 140\,\mathrm{MeV}/c^2$ se déplace horizontalement avec une impulsion de module $p = 300\,\mathrm{MeV}/c$. Quelle est son énergie cinétique T ? le module de sa vitesse v_1 ?
Cette particule passe au point M avec le vecteur vitesse $\vec{v}_1 = (v_1, 0, 0)$. Donnez l'expression de la force électromagnétique $\vec{F}$ qui s'exerce sur elle dans $(\mathcal{R})$.

3. On se place maintenant dans le référentiel $(\mathcal{R}')$ lié à la particule chargée, la charge Q y est donc **immobile**. Le référentiel $(\mathcal{R}')$ est animé de la vitesse $\vec{v}_1$ par rapport à $(\mathcal{R})$. On définit la rapidité φ_1 par $\tanh\varphi_1 = v_1/c$.

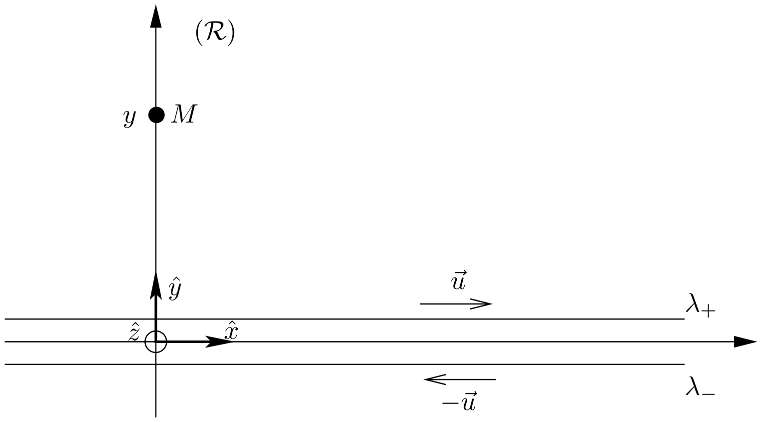

FIG. 2 – Les deux fils chargés en mouvement.

a. Montrez que les rapidités respectives des charges $+q$ et $-q$ dans $(\mathcal{R}')$ s'écrivent

$$\varphi'_+ = \varphi - \varphi_1 \quad \text{et} \quad \varphi'_- = -\varphi - \varphi_1$$

b. Écrivez les expressions de λ'_+ et λ'_-, les densités linéaires de charge dans $(\mathcal{R}')$, en fonction de λ_0, φ et φ_1.

c. Quelle est la densité de linéaire de charge globale Λ' ? Quelle est l'expression résultante du champ électrique $\vec{E}\,'(y)$ s'exerçant sur la charge Q au point M ? Celle de la force électromagnétique $\vec{F}\,'$?

d. Les expressions de la force électromagnétique obtenues dans la question précédente et dans la question **2.e** sont différentes. Établissez la relation générale qui relie les coordonnées F_y et F'_y de la force s'exerçant respectivement dans $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{R}')$ sur une charge **immobile** dans $(\mathcal{R}')$. Vérifiez que les expressions obtenues en **3.c** et **2.e** sont liées par cette relation.

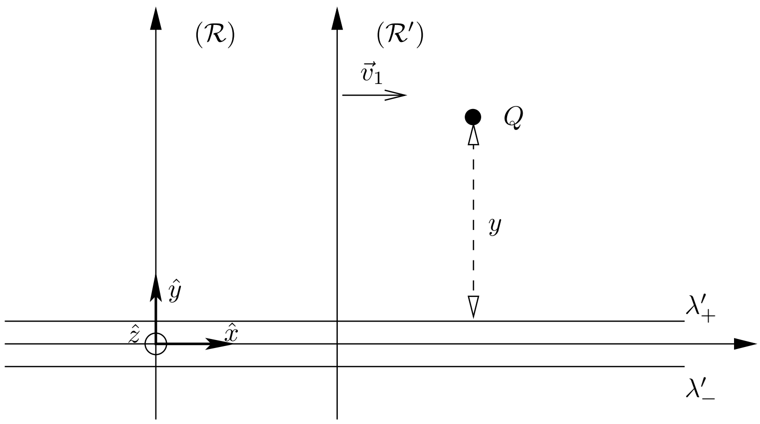

FIG. 3 – Charge dans le champ généré par les deux fils en mouvement.

Partie B

Dans un référentiel $(\mathcal{R})$ on définit un champ électrique $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ et un champ magnétique $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$, en fonction du potentiel électrique Φ et du potentiel vecteur $\vec{A}$. Un référentiel $(\mathcal{R}')$ est animé d'un mouvement rectiligne uniforme dans $(\mathcal{R})$, caractérisé par la vitesse $\vec{V} = (V, 0, 0)$ (on pose $V = c \tanh \varphi$).

1. Trouvez les expressions de potentiel électrique Φ' et des coordonnées du potentiel vecteur $\vec{A}'$ dans $(\mathcal{R}')$, en fonction de Φ, des coordonnées de $\vec{A}$ et de φ.

2. Exprimez E'_y en fonction de Φ des coordonnées de $\vec{A}$ et de φ, puis en fonction des coordonnées de $\vec{E}$ et$\vec{B}$, et de φ.

3. Exprimez B'_z en fonction de Φ des coordonnées de $\vec{A}$ et de φ, puis en fonction des coordonnées de $\vec{E}$ et $\vec{B}$, et de φ.

4. Dans le cas particulier où $\vec{E} = (0, 0, 0)$ et $\vec{B} = (0, 0, B_z)$, donnez les expressions de E'_y et B'_z.