Université de Nice
Licence – L2, MP.

Le 15 janvier 2007

Examen de Relativité

Remarque : les réponses apportées aux questions doivent être *concises*. On reportera clairement sur la copie d'examen les numérotions des questions (p.ex. **1(a).**, **1(b).**, ...,**3(a).**, etc...).

1 – Questions préliminaires

a. Démontrez que $\|\underline{P}\|^2$, c'est-à-dire la norme lorentzienne du quadrivecteur énergie-impulsion d'une particule de masse m, égale m^2c^2. Montrez ensuite que la masse d'une particule est nulle si et seulement si sa vitesse est égale à la vitesse de la lumière c.

b. Pour rappel l'effet *Doppler relativiste* (DR) est le suivant : Si T est la période d'une source d'ondes électromagnétiques, qui s'éloigne d'un observateur O à la vitesse v, alors la période des ondes mesurée par cet observateur est donnée par

$$T_{DR} = T\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \tag{1}$$

où $\beta = v/c$. L'effet Doppler *classique* s'écrirait ici $T_{DC} = T(1+\beta)$. Montrez que $T_{DC} = \gamma T_{DR}$ et commentez l'interprétation physique de cette relation. (comme d'habitude $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$).

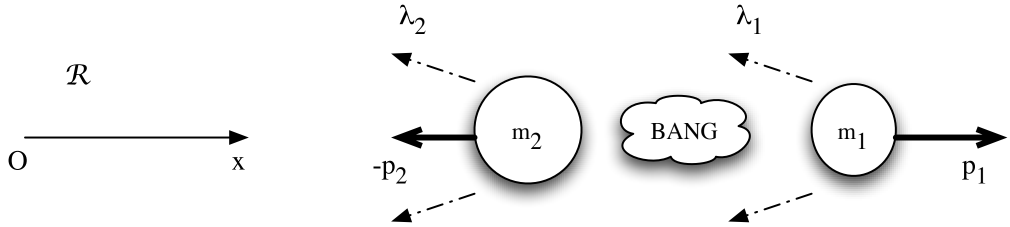
c. Après avoir rappelé la relation qui lie T, λ et c, écrivez l'équation (1) en termes des longueurs d'onde λ_{DR} et λ correspondant à T_{DR} et T. On a vu que la *rapidité* φ est définie par $\beta = \tanh\varphi$. Démontrez que

$$\lambda_{DR} = \lambda e^{\varphi} \tag{2}$$

Rappel : $\tanh\varphi = \sinh\varphi/\cosh\varphi$, $\cosh\varphi = (e^{\varphi}+e^{-\varphi})/2$ et $\sinh\varphi = (e^{\varphi}-e^{-\varphi})/2$.

2 – Analyse Doppler de l'explosion d'une étoile en deux fragments

On considère une étoile émettant de la lumière de longueur d'onde λ dans son référentiel propre, c'est-à-dire le référentiel $\mathcal{R}$ où son centre de masse est immobile. A un moment donné cette étoile explose et éclate en deux fragments de masses différentes s'éloignant l'un de l'autre à très grande vitesse. Par rapport au point O du référentiel $\mathcal{R}$ (cf. dessin ci-dessous) on convient d'appeler m_1 le fragment qui se propage dans le sens de l'éloignement et m_2 celui qui se propage dans le sens du rapprochement.



a. En invoquant une loi de conservation fondamentale, démontrez que les vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ de m_1 et m_2 sont forcément deux vecteurs de même direction mais de sens opposés : $\vec{v}_1 = v_1\,\hat{x}$; $\vec{v}_2 = -v_2\,\hat{x}$; Montrez que si $m_2 > m_1$ alors $v_1 > v_2$. Dans la suite on notera comme d'habitude $\beta_i = v_i/c$ et $\gamma_i = 1/\sqrt{1-\beta_i^2}$, $i = 1, 2$.

b. On appelle m la masse de l'étoile avant l'explosion. En utilisant la conservation de l'énergie relativiste, écrivez la relation qui donne m en fonction de m_1 et de m_2. Peut-on dire qu'il existe-t-il un défaut de masse $\mu = m - (m_1 + m_2) > 0$? Dans l'affirmative, comment interprète-t-on μc^2 ? Ecrivez également μc^2 en utilisant le développement limité de γ jusqu'à l'ordre v^2/c^2.

c. La conservation de l'impulsion s'écrit ici $p_1 - p_2 = 0$. Déduisez-en l'équation suivante :

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\sinh \varphi_1}{\sinh \varphi_2} \tag{3}$$

Rappel : $\gamma = \cosh \varphi$ et $\gamma\beta = \sinh \varphi$.

d. Expliquez pourquoi un observateur situé au point O du référentiel $\mathcal{R}$, qui mesure les longueurs d'onde émises par m_1 et m_2, trouve respectivement $\lambda_1 > \lambda$ et $\lambda_2 < \lambda$.

e. Justifiez les équations :

$$\frac{\lambda_1}{\lambda} = e^{\varphi_1}; \qquad \frac{\lambda_2}{\lambda} = e^{-\varphi_2} \tag{4}$$

En combinant ces relations avec l'équation (3), montrez que l'on peut déterminer m_2/m_1 en fonction des longueurs d'onde λ, λ_1 et λ_2.

f. Montrez que si $m_1 = m_2$ alors $\lambda = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$.

g. On considère à présent le référentiel $\tilde{\mathcal{R}}$ dans lequel l'étoile de masse m se déplaçait à vitesse V avant son explosion. (On suppose $V < v_i$, $i = 1, 2$). Pour chacun des indices $i = 1$ et 2 écrivez la vitesse $\tilde{v}_i$ de la masse m_i dans ce nouveau référentiel en fonction de V et de v_i.

h. On note Φ la rapidité correspondant à V. Sans rentrer dans les détails de calculs, commentez les relations suivantes :

$$\tilde{\varphi}_1 = \varphi_1 + \Phi, \qquad -\tilde{\varphi}_2 = -\varphi_2 + \Phi \tag{5}$$

i. (Question difficile) Montrez que l'on peut écrire :

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\tilde{\lambda}_2(\tilde{\lambda}_1^2 - \tilde{\lambda}^2)}{\tilde{\lambda}_1(\tilde{\lambda}^2 - \tilde{\lambda}_2^2)} \tag{6}$$

où $\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ sont les longueurs d'ondes des étoiles correspondant aux masses m, m_1, m_2 mesurées dans le référentiel $\tilde{\mathcal{R}}$.