Université de Nice - L2 - Probabilités

EXAMEN FINAL DU 23 MAI 2011.

DURÉE : 2H00. AUCUN DOCUMENT AUTORISÉ. CALCULATRICE INTERDITE.

La rédaction aura une part importante dans la notation. Le candidat indiquera clairement sur sa copie le groupe (Maths, Physique ou Electronique) auquel il appartient.

1. Question de Cours

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. prenant un nombre au plus dénombrable de valeurs, de même loi, indépendantes et de carré intégrable.
Démontrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\{\big|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \mathbb{E}(X_1)\big| \geq \varepsilon\} = 0.$$

2. Exercice 1

L'évolution du cours d'un actif financier entre un instant initial 0 et un instant terminal N est modélisée de la façon suivante. Pour tout instant (entier) $1 \leq n \leq N$, le cours est posé égal à

$$S_n = S_0 \times \xi_1 \times \xi_2 \times \cdots \times \xi_n,$$

où S_0 désigne le cours initial de l'actif financier (supposé déterministe, i.e. non-aléatoire) et $\xi_1, \ldots, \xi_N$ sont N v.a. indépendantes à valeurs dans un ensemble à deux éléments réels $\{b, h\}$ telles que

$$\mathbb{P}\{\xi_n = h\} = p, \quad \mathbb{P}\{\xi_n = b\} = q, \quad 1 \leq n \leq N,$$

où $0 < p, q < 1$ et $p + q = 1$.

Les réels b et h vérifient $0 < b < h$. La lettre b désigne la baisse du cours et la lettre h la hausse du cours.

(1) Pour tout $n \in \{1, \ldots, N\}$, calculer $\mathbb{E}(\xi_n)$ et $\mathbb{E}(\xi_n^2)$.

(2) En déduire la valeur de $\mathbb{E}(S_N)$ et $\mathbb{V}(S_N)$.

(3) Calculer la loi de $\ln(\xi_n)$, pour $1 \leq n \leq N$.

(4) Trouver deux valeurs de b et h telles que S_N puisse s'écrire sous la forme

$$S_N = S_0 \exp(T_N),$$

où T_N est une v.a. de loi Binomiale dont on précisera les paramètres.

(5) Dans le cas où b et h sont des réels (strictement positifs) quelconques, trouver deux réels β et γ tels que S_N puisse s'écrire sous la forme

$$S_N = S_0 \exp\big(\beta + \gamma T_N\big),$$

où T_N est une v.a. de loi Binomiale dont on précisera les paramètres.

(6) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Chebychev, montrer que
$$\forall a > 0, \quad \mathbb{P}\{S_N > aS_0 b^N\} \leq N[\ln(a)]^{-2}\sigma^2 p(1-p),$$
où $\sigma = \ln(h/b)$.

(7) On suppose que $p^{1/2}(1-p)^{1/2}\sigma = N^{-1/2}$. Pour $0 < a_1 < a_2$, montrer que, pour N grand, il est possible de faire l'approximation
$$\mathbb{P}\{a_1 < \frac{S_N}{S_0 b^N \exp\big(N^{1/2}(p/(1-p))^{1/2}\big)} < a_2\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\ln(a_1)}^{\ln(a_2)} \exp(-x^2/2)dx.$$

3. Exercice 2

On rappelle qu'une v.a. X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si
$$\forall n \geq 0, \quad \mathbb{P}\{X = n\} = \frac{\lambda^n}{n!}\exp(-\lambda).$$

Dans la suite, on se donne une généalogie d'individus se reproduisant suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Autrement dit, on se donne $Z_0, \dots, Z_N$ v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $Z_0 = 1$ et, pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$,
$$(\star) \qquad \mathbb{P}\{Z_{n+1} = j | Z_n = i\} = \frac{(i\lambda)^j}{j!}\exp(-i\lambda), \quad j \in \mathbb{N},$$
si i est un entier supérieur à 1. Si $i = 0$, $\mathbb{P}\{Z_{n+1} = 0 | Z_n = 0\} = 1$.

Pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$, Z_n modélise le nombre d'individus à la génération n. Dire que $Z_0 = 1$, c'est dire qu'il y a un ancêtre. Cet ancêtre a un nombre aléatoire d'enfants Z_1 : ils constituent la première génération. Ensuite, les individus de la première génération ont eux-mêmes des enfants : leur nombre total est Z_2, et ainsi de suite...

(1) Etant donnés deux v.a. X et Y indépendantes, X suivant une loi de Poisson de paramètres $\lambda_1 > 0$ et Y une loi de Poisson de paramètre $\lambda_2 > 0$, montrer que $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

Cette propriété justifie $(\star)$: Dans $(\star)$, il y a i parents à la génération n. Chacun a un nombre d'enfants suivant une loi de Poisson de paramètre λ. De fait, le nombre d'enfants à la génération $n+1$ suit une loi de Poisson de paramètre λi.

(2) Montrer que Z_1 suit une loi de Poisson de paramètre λ.

(3) Montrer que
$$\mathbb{P}\{Z_2 = 0\} = \exp\big(\lambda(\exp(-\lambda) - 1)\big).$$

(4) En déduire $\mathbb{P}\{Z_1 = i | Z_2 = 0\}$, $i \geq 0$. Quelle loi reconnait-on ?

(5) Montrer que
$$\mathbb{E}(Z_{n+1}) = \sum_{j=1}^{+\infty}\Big(\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(i\lambda)^j}{(j-1)!}\exp(-i\lambda)\mathbb{P}\{Z_n = i\}\Big), \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

En admettant que les deux sommes ci-dessus peuvent être échangées[1], en déduire que $\mathbb{E}(Z_{n+1}) = \lambda\mathbb{E}(Z_n)$, $0 \leq n \leq N-1$. En déduire $\mathbb{E}(Z_n)$, pour $0 \leq n \leq N$.

[1]C'est-à-dire, $\mathbb{E}(Z_{n+1}) = \sum_{i=0}^{+\infty}\Big[\Big(\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(i\lambda)^j}{(j-1)!}\Big)\exp(-i\lambda)\mathbb{P}\{Z_n = i\}\Big]$.