Université de Nice - L2 - Probabilités

EXAMEN PARTIEL DU 22 MARS 2011.

DURÉE : 1H30. AUCUN DOCUMENT AUTORISÉ. CALCULATRICE INTERDITE.

La rédaction aura une part importante dans la notation. Le candidat indiquera clairement sur sa copie le groupe (Maths, Physique ou Electro-BIM) auquel il appartient. (Les barèmes sont susceptibles d'être différents selon les groupes.)

1. Questions de Cours

Groupe Maths-Physique : Rappeler et démontrer la formule de Bayes.
~~Groupe Electro-BIM~~ :

~~(1)~~ Donner la définition d'une mesure de probabilité sur un espace dénombrable.

~~(2)~~ n pièces de paramètre de succès $p \in]0,1[$ sont lancées à pile ou face. Quelle est la loi du nombre de succès obtenus ? (Démontrer le résultat.)

~~(3)~~ Par quelle loi peut-on approcher la loi du nombre de succès obtenus lorsque p est de la forme $p = \lambda/n$, $\lambda > 0$, et n tend vers l'infini ? (Démontrer le résultat.)

2. Exercice 1

Deux joueurs lancent chacun n fois une pièce de monnaie équilibrée. Les résultats sont modélisés à l'aide de l'espace de probabilité $\Omega = \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n$, muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. Le premier instant de succès du joueur numéro 1 s'écrit

$$T_1 : \big((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\big) \in \Omega \\ \mapsto \begin{cases} k \text{ si } x_1 = \cdots = x_{k-1} = 0 \text{ et } x_k = 1, & 1 \leq k \leq n, \\ n+1 \text{ si } x_1 = \cdots = x_n = 0. \end{cases}$$

De même, le premier instant de succès du joueur numéro 2 s'écrit

$$T_2 : \big((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\big) \in \Omega \\ \mapsto \begin{cases} k \text{ si } y_1 = \cdots = y_{k-1} = 0 \text{ et } y_k = 1, & 1 \leq k \leq n, \\ n+1 \text{ si } y_1 = \cdots = y_n = 0. \end{cases}$$

(1) En utilisant l'équivalence $\min(a,b) \geq k \Leftrightarrow (a \geq k \text{ et } b \geq k)$, calculer

$$\mathbb{P}\{\min(T_1, T_2) \geq k\}, \quad 1 \leq k \leq n+1.$$

(2) En déduire la valeur de $\mathbb{P}\{\min(T_1, T_2) = k\}$, $1 \leq k \leq n$.

(3) Par quelle loi peut-on approcher la loi de $\min(T_1, T_2)$ quand n tend vers l'infini ?

3. Exercice 2

Deux urnes sont disposées sur une table. Une première urne, de couleur blanche, compte n boules numérotées de 1 à n. Une deuxième urne, de couleur rouge, compte $n+1$ boules numérotées de 1 à $n+1$.

(1) On tire successivement et sans remise les n boules de l'urne blanche. Dénombrer les tirages possibles.

(2) En réalité, les tirages successifs et sans remise des n boules de l'urne blanche s'apparentent à une permutation de $\{1, \dots, n\}$, i.e. à une application bijective de $\{1, \dots, n\}$ sur lui-même. Une permutation σ de $\{1, \dots, n\}$ peut être comprise comme un vecteur $(\sigma^1, \dots, \sigma^n)$, les $(\sigma^i)_{1 \leq i \leq n}$ étant des éléments deux à deux différents de $\{1, \dots, n\}$. (Ici, σ^i est l'image de i par σ ou encore le numéro de la $i$ème boule tirée.) Dans la suite, l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$ est noté $\mathcal{S}_n$.

Calculer le cardinal de $\mathcal{S}_n$.

(3) On procède maintenant aux tirages successifs et sans remise des n boules de l'urne blanche, mais, en supplément, on tire une boule de l'urne rouge. L'expérience est modélisée à l'aide de l'ensemble $\Omega = \mathcal{S}_n \times \{1, \dots, n+1\}$, muni de la probabilité uniforme, notée $\mathbb{P}$, et des variables aléatoires

$$S_n : (\sigma, k) \in \Omega \mapsto \sigma, \quad U_{n+1} : (\sigma, k) \in \Omega \mapsto k.$$

Que représente la variable S_n ? Que représente la variable U_{n+1} ? Donner les lois de S_n et de U_{n+1}.

(4) Dans la suite, il faut bien comprendre que $S_n(\sigma, k)$ est une permutation : elle peut s'écrire sous la forme $(S_n^1(\sigma, k), \dots, S_n^n(\sigma, k))$. En particulier, en omettant (σ, k), S_n peut être compris comme $(S_n^1, \dots, S_n^n)$, S_n^i désignant, pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, l'image (aléatoire) de i par S_n.

Que représente S_n^i, pour $1 \leq i \leq n$? Donner la loi de S_n^i pour chaque $1 \leq i \leq n$.

(5) Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\mathbb{P}\{S_n^i < U_{n+1}\} = \frac{1}{2}.$$

(6) Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, nous définissons la variable aléatoire

$$T_{n+1}^i = \begin{cases} S_n^i + 1 & \text{si } S_n^i \geq U_{n+1}, \\ S_n^i & \text{si } S_n^i < U_{n+1}. \end{cases}$$

Et, pour $i = n+1$, nous posons $T_{n+1}^{n+1} = U_{n+1}$.

Montrer que le vecteur $T_{n+1} = (T_{n+1}^1, \dots, T_{n+1}^{n+1})$ est composé de $n+1$ éléments deux à deux distincts de $\{1, \dots, n+1\}$. En déduire que T_{n+1} définit un élément de $\mathcal{S}_{n+1}$. Donner la loi de T_{n+1}.

(7) On considère $\mathcal{S}_{n+1}$ muni de la probabilité uniforme, notée $\mathbb{Q}$, et on considère la variable aléatoire :

$$R_{n+1} : \sigma \in \mathcal{S}_{n+1} \mapsto \sharp\big\{1 \leq i \leq n+1 : \sigma(i) \leq \sigma(n+1)\big\}.$$

(Ici, le symbole $\sharp$ désigne le cardinal.)

Montrer que, pour tout $k \in \{1, \dots, n+1\}$, $\mathbb{Q}\{R_{n+1} = k\} = \mathbb{P}\{U_{n+1} = k\}$. En déduire la loi de R_{n+1}.