Université de Nice Sophia-Antipolis
Mécanique Quantique – L2

Année universitaire 2010-2011

Examen de physique du 30 mai 2011

1 Spin 1/2

Une particule se trouve dans l'état de spin :

$$|\psi\rangle = A \begin{pmatrix} 1-2\mathrm{i} \\ 2 \end{pmatrix},$$

écrit dans la base des vecteurs propres, $|+\rangle_z$ et $|-\rangle_z$, de la matrice qui correspond à une mesure du spin selon $\hat{z}$, S_z.

1. Déterminer la constante A pour normaliser $|\psi\rangle$.
2. Si on mesure le spin selon $\hat{z}$ pour cette particule (c'est à dire S_z), quels sont les résultats possibles et quelles sont les probabilités associées ?
3. Si on mesure le spin selon $\hat{x}$ pour cette particule (c'est à dire S_x), quels sont les résultats possibles et quelles sont les probabilités associées ?
4. Si on mesure le spin selon $\hat{y}$ pour cette particule (c'est à dire S_y), quels sont les résultats possibles et quelles sont les probabilités associées ?

Nota :
Les matrices de Pauli sont :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2 Evolution d'un système quantique

On considère un système quantique avec un hamiltonien :

$$H = \begin{pmatrix} W & V \\ V & W \end{pmatrix}$$

dans une base donnée ($|1\rangle$ et $|2\rangle$). W et V sont des nombres réels.

1. Calculer les énergies propres du système.
2. Calculer les vecteurs propres, $|+\rangle$ et $|-\rangle$, de ce hamiltonien, correctement normalisés.
3. Exprimer les vecteurs $|1\rangle$ et $|2\rangle$ dans la base de ces vecteurs propres, $|+\rangle$ et $|-\rangle$.
4. On suppose que le système est initialement dans l'état $|1\rangle$. Donner une expression du vecteur d'état à un temps quelconque.
5. Calculer la probabilité de trouver le système dans l'état $|2\rangle$ en fonction du temps, pour la même condition initiale.

3 Etat intriqué à 2 photons

On considère deux photons dans un état de polarisation intriqué :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|1:x\rangle \otimes |2:x\rangle + |1:y\rangle \otimes |2:y\rangle\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|xx\rangle + |yy\rangle\right\}$$

Les états $|x\rangle$ et $|y\rangle$ sont des états de polarisation linéaire suivant $\hat{x}$ et $\hat{y}$.

1. Soit

   $$|\theta\rangle = \cos\theta|x\rangle + \sin\theta|y\rangle$$

   l'état de polarisation linéaire suivant la direction $\hat{u}_\theta$ du plan xOy et

   $$|\theta_\perp\rangle = -\sin\theta|x\rangle + \cos\theta|y\rangle$$

   l'état de polarisation orthogonale. Montrer que :

   $$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|\theta\theta\rangle + |\theta_\perp\theta_\perp\rangle\right\}\,.$$

   L'état $|\psi\rangle$ est donc invariant par rotation autour de Oz.
2. Alice mesure l'état du photon (1) qu'elle trouve dans l'état $|\theta\rangle$. Dans quel état est alors le photon (2)) $\rightarrow |\theta\rangle$.
3. Quelle est la probabilité que Bob trouve le photon (2) dans l'état $|x\rangle$? $\cos^2\theta$?