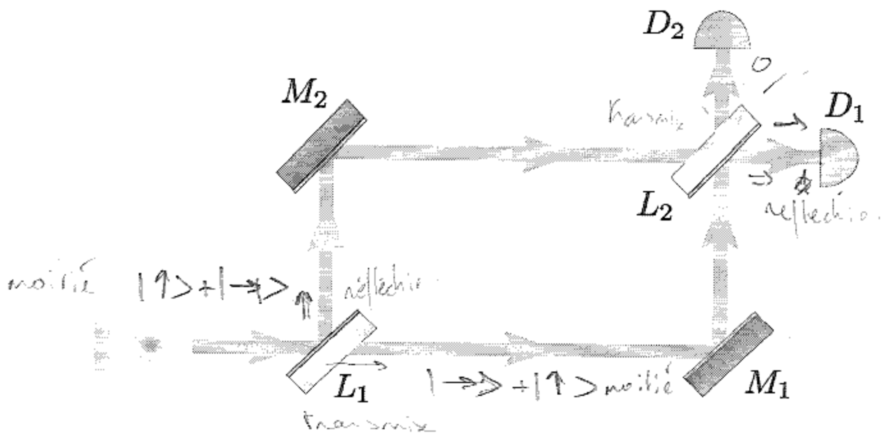
Université de Nice Sophia-Antipolis
Mecanique Quantique – L2

Année universitaire 2009-2010

Examen de physique du 18 mai 2010

1 Interféromètre de Mach-Zehnder



Une lampe émet un faisceau de photons non polarisés, c'est à dire ayant une polarisation aléatoire où les états de polarisations horizontale $|\rightarrow\rangle$ et verticale $|\uparrow\rangle$ ont les mêmes poids statistiques. On envoie ce faisceau dans un interféromètre composé de :

- deux lames séparatrices L_1 et L_2 sur lesquelles une partie de la lumière est réfléchie et une partie de la lumière est transmise
- deux miroirs M_1 et M_2 sur lesquels la lumière est réfléchie.

A la sortie de l'interféromètre, les photons arrivent soit dans le détecteur D_1 soit dans le détecteur D_2, ces détecteurs étant insensibles à la polarisation des photons.

On donne les amplitudes de probabilités suivantes :

- $A_{11} = +\frac{1}{2}$, l'amplitude de probabilité de passer par M_1 et d'arriver à D_1,
- $A_{12} = +\frac{1}{2}$, l'amplitude de probabilité de passer par M_1 et d'arriver à D_2,
- $A_{21} = +\frac{1}{2}$, l'amplitude de probabilité de passer par M_2 et d'arriver à D_1,
- $A_{22} = -\frac{1}{2}$, l'amplitude de probabilité de passer par M_2 et d'arriver à D_2.

Calculer, dans les cas suivant, la probabilité P_1 qu'un photon émis par la lampe arrive en D_1 et la probabilité P_2 qu'un photon émis par la lampe arrive en D_2.

1. Le dispositif est tel que montré sur la figure.
2. On ajoute un polariseur linéaire orienté verticalement devant le miroir M_1.
3. On ajoute un polariseur linéaire orienté verticalement devant le miroir M_2 et un polariseur linéaire orienté horizontalement devant le détecteur D_1

15

2 Formalisme de Dirac

Soient $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ et $|\psi_3\rangle$ trois vecteurs propres, de norme unité, d'un Hamiltonien H, correspondant à trois valeurs propres différentes, E_1, E_2 et E_3.

On considère le vecteur, non-normalisé :

$$|\varphi\rangle = 4|\psi_1\rangle + 3|\psi_2\rangle + 2|\psi_3\rangle$$

1. Normaliser ce vecteur.
2. Si on mesure l'énergie du système, quelle est la probabilité d'obtenir l'énergie E_2 ? 9 .
3. Dans quel état est le système après une mesure où on a obtenu l'énergie E_2 ? ψ_2 .

   Supposons que les trois états ci-dessus sont les trois états de l'atome d'hydrogène de Bohr de plus basses énergies :

$$E_n = -\frac{E_I}{n^2}\,,$$

   où $E_I = 13,6$ eV.

   9 A $\langle \varphi | \varphi \rangle$.

4. Quelle est la valeur moyenne $\langle E\rangle$ de l'énergie de l'état $|\varphi\rangle$, en électron-volt ?
5. Quelle est la dispersion $\Delta E = \sqrt{\langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2}$ de l'énergie, en électron-volt, pour l'état $|\varphi\rangle$?

$\langle \varphi | A^2 | \varphi \rangle$

$\langle \varphi | E | \varphi \rangle$

10

3 Mesure de spin

On considère un atome de spin $1/2$. Cet atome possède un moment angulaire $\vec{S}$ proportionnel aux matrices de Pauli.

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$$

avec

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

où les matrices de Pauli sont représentées dans la base des états propres du moment angulaire le long de l'axe z : $|+\rangle_z$ et $|-\rangle_z$.

On souhaite mesurer la projection du moment angulaire sur un axe u, défini par un vecteur unitaire $\vec{u} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$. La matrice correspondant à la mesure du moment angulaire sur l'axe u est notée S_u et vaut

$$S_u = \vec{S}\cdot\vec{u}$$

1. Ecrire la matrice S_u. On rappelle que
$$1 \pm \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi/4}$$
2. Trouver les valeurs propres λ_+ (positive) et λ_- (négative) de la matrice S_u.
3. Trouver un vecteur propre $|+\rangle_u$ correspondant à la valeur propre positive de la matrice.
4. Normaliser ce vecteur propre $|+\rangle_u$.
5. On place l'atome dans l'état $|+\rangle_x$
$$|+\rangle_x = \frac{|+\rangle_z + |-\rangle_z}{\sqrt{2}}$$
   et on fait une mesure du moment angulaire suivant l'axe u. Quelle est la probabilité P de trouver comme résultat de mesure la valeur λ_+ ?