Examen de mécanique quantique du 10 mai 2007

Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice 1 : *Paire de photons intriqués et polarisations circulaires*

On considère deux photons partant en sens inverse, l'un (1) suivant Oz et l'autre (2) suivant $-Oz$, dans un état intriqué de polarisation

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|1:x\rangle \otimes |2:x\rangle + |1:y\rangle \otimes |2:y\rangle\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|xx\rangle + |yy\rangle\right)$$

Les états $|x\rangle$ et $|y\rangle$ sont des états de polarisation linéaire suivant Ox et Oy.

1. Soit $|\theta\rangle = \cos\theta|x\rangle + \sin\theta|y\rangle$ l'état de polarisation linéaire suivant la direction $\hat{u}_\theta$ du plan xOy et $|\theta_\perp\rangle = -\sin\theta|x\rangle + \cos\theta|y\rangle$ l'état de polarisation orthogonale. Montrer que

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\theta\,\theta\rangle + |\theta_\perp\,\theta_\perp\rangle\right)$$

L'état $|\Phi\rangle$ est donc invariant par rotation autour de Oz.

2. On rappelle que, pour le photon (1) se propageant suivant $+Oz$, les directions xyz formant un trièdre orienté dans le sens direct, les états de polarisation circulaire s'écrivent :

$$|1:D\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1:x\rangle + \mathrm{i}|1:y\rangle\right) \quad \text{et} \quad |1:G\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1:x\rangle - \mathrm{i}|1:y\rangle\right).$$

De même, pour le photon (2) se propageant suivant $-Oz$, les directions x (-y) (-z) formant un trièdre orienté dans le sens direct, les états de polarisation circulaire s'écrivent :

$$|2:D\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2:x\rangle - \mathrm{i}|2:y\rangle\right) \quad \text{et} \quad |2:G\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2:x\rangle + \mathrm{i}|2:y\rangle\right).$$

Écrire $|\Phi\rangle$ en fonction des états de polarisation circulaire $|D\rangle$ et $|G\rangle$ de chacun des photons.

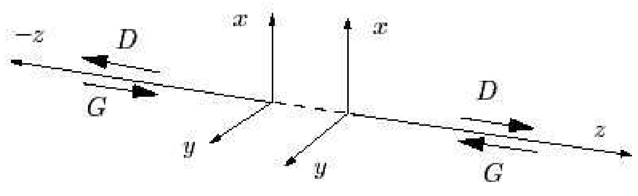

Figure : Configuration des polarisations des photons intriqués.

3. Calculer la probabilité pour que les photons de la paire soient tous deux mesurés dans un état de polarisation circulaire droite.

Exercice 2 : *La molécule de formaldéhyde*

Dans la molécule $H_2C{=}O$ (formaldéhyde), la double liaison entre le carbone et l'oxygène est formée d'une liaison σ et d'une liaison π. La liaison π est constituée par 2 électrons de spins opposés, sans interaction mutuelle, *délocalisés* entre les 2 atomes.

On s'intéresse à l'un de ces électrons π. Son énergie est :
E_C lorsqu'il se trouve au voisinage de l'atome de carbone ; son état est alors noté $|C\rangle$,
E_O lorsqu'il se trouve au voisinage de l'atome de carbone ; son état est alors noté $|O\rangle$.

Comme l'atome d'oxygène est plus électronégatif que celui du carbone : $E_O < E_C$, l'électron peut passer d'un état à l'autre, l'énergie alors mise en jeu est notée $-A$. Les deux états $|C\rangle$ et $|O\rangle$ constituent la base naturelle de l'espace des états de l'électron π.

1. Écrire, en le justifiant, le hamiltonien d'un électron π dans la base naturelle. Montrer qu'il peut être mis sous la forme :

$$H = \begin{pmatrix} E_C & -A \\ -A & E_O \end{pmatrix}$$

2. Déterminer les niveaux d'énergie de l'électron, en mettant en évidence celui de l'état fondamental.

3. On s'intéresse maintenant aux états stationnaires de l'électron, en recherchant les composantes des deux vecteurs propres dans la base naturelle. Il est avantageux de poser $\tan\alpha = A/B$, où $B = \frac{1}{2}(E_C - E_O) > 0$, et d'exprimer ces composantes en fonction de l'angle $\alpha/2$. Montrer que ces décompositions sont de la forme :

$$|+\rangle = \cos(\alpha/2)|C\rangle - \sin(\alpha/2)|O\rangle\,, \qquad |-\rangle = \sin(\alpha/2)|C\rangle + \cos(\alpha/2)|O\rangle\,.$$

On rappelle : $\cos\alpha = \cos^2(\alpha/2) - \sin^2(\alpha/2)$ et $\sin\alpha = 2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)$.

4. Calculer, dans l'état fondamental, la probabilité de trouver l'électron π localisé au voisinage de l'atome de carbone ou d'oxygène ?

5. On suppose qu'à l'instant $t = 0$ le système décrit par H se trouve dans l'état $|C\rangle$.

(i) Quel est le vecteur d'état du système à l'instant $t > 0$?

(ii) Quelle est la probabilité de trouver l'électron π localisé au voisinage de l'atome d'oxygène à l'instant t ?