Examen de mécanique quantique du 12 mai 2006

Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice 1 : *Evolution temporelle du moment magnétique d'une particule*

L'opérateur moment magnétique d'une particule de spin 1/2 est donné par :

$$\vec{\mu} = \mu_0 \vec{\sigma}$$

où $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ est le vecteur formé par les trois matrices de Pauli, représentant les projections du moment magnétique sur les différents axes.
On notera $|+\rangle_z$ et $|-\rangle_z$ les états propres de σ_z correspondant aux valeurs propres +1 et -1. Dans la base formée par ces deux vecteurs, les matrices de Pauli sont données par :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On place cette particule dans un champ magnétique externe $\vec{B}$ dirigé selon l'axe Ox, $\vec{B} = (B, 0, 0)$. L'opérateur Hamiltonien H représentant l'énergie du moment magnétique dans le champ est alors donné par :

$$H = -\vec{B} \cdot \vec{\mu} = -\mu_0 \vec{B} \cdot \vec{\sigma}$$

a) Calculez l'opérateur H.

b) Trouvez les valeurs propres de l'opérateur H qui donnent les valeurs possibles de l'énergie pour ce système. Calculez ensuite les états propres associés à chacune de ces énergies.
Vous noterez E_+ l'énergie la plus élevée, E_- l'énergie la moins élevée et $|E_+\rangle$ et $|E_-\rangle$ les états propres correspondants.

c) A l'instant $t = 0$, le système se trouve dans l'état $|\psi(0)\rangle = |+\rangle_z$. Exprimez l'état $|+\rangle_z$ en fonction des états propres du Hamiltonien, puis déduisez-en l'état $|\psi(t)\rangle$ du système à un instant t quelconque.

d) Toujours à l'instant t, on fait une mesure de la projection suivant Oz du moment magnétique du système. Calculez la probabilité P_+ de trouver une valeur positive du moment magnétique suivant cet axe et la probabilité P_- de trouver une valeur négative. En déduire la valeur moyenne $\langle \mu_z(t) \rangle$ du moment magnétique suivant Oz pour une série de mesures effectuées au temps t.

e) Le moment magnétique μ_0 d'un électron vaut

$$\mu_0 = \frac{e\hbar}{2m_e}$$

Calculez la valeur de la fréquence d'oscillations du moment magnétique suivant Oz si l'électron est placé dans un champ magnétique de 10^{-3} T. On rappelle que : $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $\hbar = 1.054 \cdot 10^{-34}$ J · s et $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg.

Exercice 2 : *Inégalités de Bell avec des photons*

On considère deux photons partant en sens inverse, l'un (1) suivant Oz et l'autre (2) suivant $-Oz$, dans un état intriqué de polarisation

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|1:x\rangle \otimes |2:x\rangle + |1:y\rangle \otimes |2:y\rangle\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|xx\rangle + |yy\rangle\right)$$

Les états $|x\rangle$ et $|y\rangle$ sont des états de polarisation linéaire suivant Ox et Oy.

1. Soit $|\theta\rangle = \cos\theta|x\rangle + \sin\theta|y\rangle$ l'état de polarisation linéaire suivant la direction $\hat{u}_\theta$ du plan xOy et $|\theta_\perp\rangle = -\sin\theta|x\rangle + \cos\theta|y\rangle$ l'état de polarisation orthogonale. Montrer que

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\theta\,\theta\rangle + |\theta_\perp\,\theta_\perp\rangle\right)$$

L'état $|\Phi\rangle$ est donc invariant par rotation autour de Oz.

2. Alice et Bob analysent la polarisation des photons à l'aide de polariseurs linéaires orientés suivant les directions $\hat{u}_\alpha$ pour le photon 1 et $\hat{u}_\beta$ pour le photon 2 dans le plan xOy. Pour un polariseur linéaire orienté selon $\hat{u}_\alpha$, on définit le résultat de mesure $\varepsilon_\alpha = \pm 1$ selon qu'on trouve le photon dans l'état $|\alpha\rangle$ ou dans l'état $|\alpha_\perp\rangle$. De même, pour l'autre polariseur orienté selon $\hat{u}_\beta$, on définit le résultat de mesure $\varepsilon_\beta = \pm 1$ selon qu'on trouve le photon dans l'état $|\beta\rangle$ ou dans l'état $|\beta_\perp\rangle$.
On définit, par ailleurs :
$\mathrm{p}_{++}(\alpha,\beta)$ = probabilité pour que le photon 1 soit polarisé dans l'état $|\alpha\rangle$ et le photon 2 dans l'état $|\beta\rangle$,
$\mathrm{p}_{+-}(\alpha,\beta)$ = probabilité pour que le photon 1 soit polarisé dans l'état $|\alpha\rangle$ et le photon 2 dans l'état $|\beta_\perp\rangle$,
$\mathrm{p}_{-+}(\alpha,\beta)$ et $\mathrm{p}_{--}(\alpha,\beta)$ étant définis de façon analogue.

a. Montrer que

$$\mathrm{p}_{++}(\alpha,\beta) = \mathrm{p}_{--}(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\cos^2(\alpha-\beta)$$

$$\mathrm{p}_{+-}(\alpha,\beta) = \mathrm{p}_{-+}(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\sin^2(\alpha-\beta)$$

Suggestion : On pourra utiliser l'invariance par rotation de $|\Phi\rangle$ pour simplifier les calculs.

b. On définit, comme pour le spin 1/2,

$$E(\alpha,\beta) = [\mathrm{p}_{++}(\alpha,\beta) + \mathrm{p}_{--}(\alpha,\beta)] - [\mathrm{p}_{+-}(\alpha,\beta) + \mathrm{p}_{-+}(\alpha,\beta)]$$

que l'on peut interpréter comme la valeur moyenne du produit $\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta$.
Déduire de la question précédente que

$$E(\alpha,\beta) = \cos[2(\alpha-\beta)]\,.$$

c. Quelles valeurs de $\alpha-\beta$, $\alpha-\beta'$, $\alpha'-\beta$ et $\alpha'-\beta'$ peut-on choisir pour obtenir :

$$X = E(\alpha,\beta) - E(\alpha,\beta') + E(\alpha',\beta') + E(\alpha',\beta) = 2\sqrt{2}\ ?$$

Faire un schéma indiquant les directions $\hat{u}_\alpha$, $\hat{u}_{\alpha'}$, $\hat{u}_\beta$ et $\hat{u}_{\beta'}$ en fixant, par exemple, $\hat{u}_\alpha$ suivant Ox.

d. Dans le cadre d'une théorie faisant l'hypothèse de localité et interprétant les corrélations entre mesures des photons 1 et 2 par des causes situées dans le passé commun de ces photons, Bell a demontré que la valeur absolue de X doit rester inférieure à une valeur que l'on rappellera. Commenter.