Examen partiel de mécanique quantique du 16 mars 2007

Quelques constantes physiques : Masse de l'électron $m = 9,1094 \times 10^{-31}$ kg $= 0,51100$ MeV/c^2, charge élémentaire $q = 1,6022 \times 10^{-19}$ C, constante de Planck $h = 6,6261 \times 10^{-34}$ J.s, vitesse de la lumière dans le vide $c = 2,9979 \times 10^8$ m.s^{-1}.

Exercice 1 : *Microscope électronique*

Dans un microscope électronique à transmission typique, les électrons ont une énergie cinétique moyenne $E_c = 200$ keV.
a) Calculer la longueur d'onde moyenne λ des électrons. On rappelle la relation relativiste entre énergie cinétique et impulsion $E_c = (p^2c^2 + m^2c^4)^{1/2} - mc^2$.
b) La résolution d'un tel microscope étant donnée par $R = 0,61\lambda/\sin\theta$ et l'ouverture angulaire ne pouvant dépasser $1/5\,^\circ$ (afin de réduire les problèmes d'aberration) , évaluer numériquement la meilleure résolution qu'on puisse obtenir avec ce microscope.

Exercice 2 : *Variations sur le modèle de Bohr*

On rappelle un résultat majeur du modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène. L'énergie de la nième orbite permise est :

$$E_n = \left(-\frac{1}{2}\frac{q^4 m}{(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^2}\right)\frac{1}{n^2} = -\frac{E_0}{n^2} \qquad (E_0 = 13,606\,\text{eV}) \tag{1}$$

où m est la masse de l'électron.

On étend ce modèle à la situation de l'hélium ionisé He$^+$, qui est composé d'un noyau avec 2 protons, et donc de charge $(+2q)$, et d'un électron de charge $(-q)$.

(i) Quelle est dans ce cas l'énergie de la nième orbite ?

(ii) La série de Balmer pour l'hydrogène est issue de la transition entre les niveaux d'énergie E_n $(n > 2)$ et le niveau E_2. Ce spectre se situe entre 364,6 et 656,3 nm. Qu'en est–il pour la série correspondante de He$^+$? Est-elle aussi dans le visible ?

Exercice 3 : *Fondamental du puits carré fini*

On considère une particule piégée dans un puits de potentiel fini. On suppose que le potentiel est nul pour $-a/2 < x < +a/2$ et de hauteur constante V_0 en dehors de cet intervalle ($x < -a/2$ ou $x > +a/2$). L'équation de Schrödinger s'écrit, pour $-a/2 < x < +a/2$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2} = E\psi(x) \tag{1}$$

dont une solution générale s'écrit :

$$\psi(x) = A\sin kx + B\cos kx\,. \tag{2}$$

a) Écrire la valeur de l'énergie E en fonction de k
b) On veut calculer le fondamental dont la fonction d'onde est une fonction paire. En déduire la valeur de A.
c) Pour $x > +a/2$, la fonction d'onde du fondamental est solution de :

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)\psi(x) = 0 \tag{3}$$

Préciser pourquoi on doit avoir $E < V_0$.
d) En posant $\kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2}$, montrer qu'une solution physiquement admissible pour $x > +a/2$ s'écrit :

$$\psi(x) = C\exp(-\kappa x)\,. \tag{4}$$

e) La fonction ψ et sa dérivée étant continues en $x = +a/2$, en déduire la condition de quantification :

$$k\tan(ka/2) = \kappa\,. \tag{5}$$